Magnetický skinefekt vo vodivej feromagnetickej doske.

Bydžovský, J., Jahn, P.

Úlohy.

1. Na predloženej vzorke feromagnetického materiálu určite meraním permeabilitu pri harmonickej zmene intenzity magnetického poľa $H(t)$ s amplitúdou $H_m = 0{,}2$ A/m pri frekvencii $f = 120$ Hz.

2. Vypočítajte hĺbku vniku ϑ pri sieťovej frekvencii $f = 50$ Hz a porovnajte ju s hrúbkou plechu.

3. Odmerajte závislosti veľkosti a fázy fázora strednej hodnoty magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ od frekvencie pri konštantnej hodnote amplitúdy intenzity magnetického poľa $H_m = 0{,}2$ A/m. Z nameraných hodnôt nakreslite hodograf fázora $\mathcal{B}_s$ v závislosti od frekvencie.

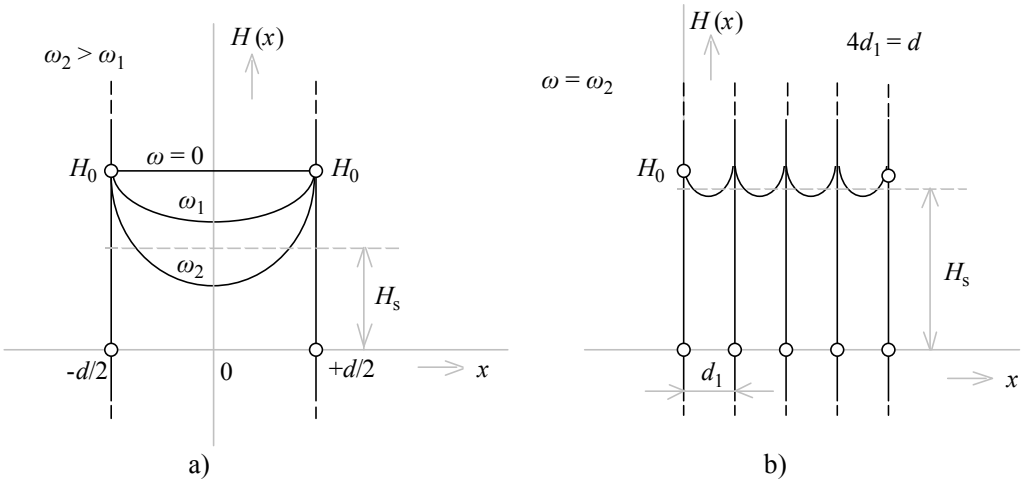
4. Vypočítajte veľkosť a fázu strednej hodnoty fázora magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ z teoretických vzťahov (pre frekvencie z predošlej úlohy) a porovnajte ich s výsledkami získanými experimentálne. Diskutujte ich prípadnú rozdielnosť.

Analýza úlohy.

Ak do homogénneho stacionárneho magnetického poľa vložíme rozľahlú elektricky vodivú feromagnetickú dosku tak, aby povrch dosky bol rovnobežný s vektorom magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ resp. intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$, potom (za predpokladu malej hrúbky dosky voči jej ostatným rozmerom) bude magnetické pole v doske rozložené prakticky tiež homogénne (obr. 1a, parameter $\omega = 0$). Pre intenzitu magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ na rozhraní dosky a okolitého prostredia platí zo zákona pre lom siločiar rovnosť tangenciálnych zložiek. Preto bude intenzita magnetického poľa $\boldsymbol{H}$, ktorá má na rozhraní len tangenciálnu zložku vo vnútri dosky rovnaká ako v jej okolitom prostredí (pôvodné homogénne magnetické pole). Súčasne platí, že magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ v doske vzrastie μ_r - krát oproti magnetickej indukcii vo vzduchu.

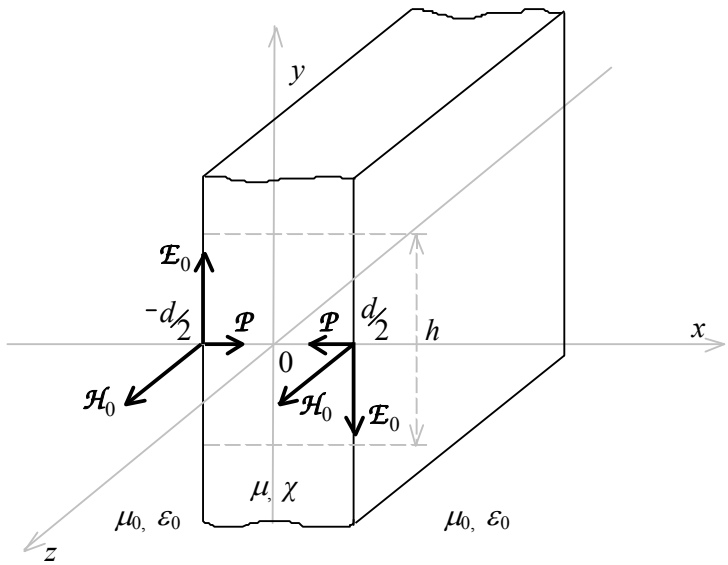
Pri časovej zmene magnetického poľa vzniknú vo vodivej doske indukované (vírivé) prúdy. Magnetické pole týchto vírivých prúdov ovplyvní pôvodné homogénne magnetické pole, čoho dôsledkom je výsledné nerovnomerné rozloženie magnetického poľa v doske. Toto nerovnomerné rozloženie sa javí ako "vytláčanie" magnetického poľa k povrchu dosky a nazývame ho magnetickým skinefektom. Pri konštantnej intenzite magnetického poľa H_0 na povrchu dosky bude sa so zvyšovaním frekvencie jeho rozloženie v priereze dosky značne meniť (pozri $H(x)$ pre parametre ω_1, ω_2 na obr. 1a) a tým stredná hodnota H_S klesať.

Z hľadiska technickej praxe predstavuje magnetický skinefekt závažný problém. Nerovnomerné rozloženie magnetického poľa v doske spôsobuje nerovnomerné nasycovanie magnetického obvodu, čo je potrebné uvážiť pri návrhu magnetických obvodov. Snaha o potlačenie nepriaznivých účinkov uvedeného javu viedla pri magnetických obvodoch elektrických strojov a prístrojov k realizácii magnetických obvodov poskladaním z tenkých izolovaných feromagnetických plechov (obr. 1b), alebo pre vyššie frekvencie použitím magnetických materiálov s vysokým elektrickým odporom - ferity.



Obr. 1 Rozloženie amplitúdy intenzity magnetického poľa v priereze magnetickej dosky 1a, resp. v poskladanom zväzku o rovnakej celkovej hrúbke pri uhlovej frekvencii ω_2.

Z teoretického hľadiska je problém rozloženia elektromagnetického poľa v nekonečne rozľahlej vodivej magnetickej doske (charakterizovanej permeabilitou μ a vodivosťou χ) vloženej do homogénneho, harmonicky sa meniaceho poľa jedným zo známych analytických riešení [1]. Riešenie vychádza z predpokladu rovnakej intenzity magnetického poľa na oboch stranách dosky (vloženej do elektromagnetického poľa), ktorá je vyjadrená komplexným vektorom $\mathcal{H}_0$. Z dôvodov predstavy kolmého vniku rovinnej elektromagnetickej vlny do feromagnetika z oboch strán bude smer vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}_0$ na protiľahlých stenách dosky opačného smeru (podľa obr. 2). Smer vniku rovinnej vlny je zhodný so smerom Poyntingových vektorov $\boldsymbol{P}$.



Obr. 2 Umiestnenie feromagnetickej vodivej dosky v elektromagnetickom poli charakterizovanom komplexnými vektormi $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{P}$

Nech vektor intenzity magnetického poľa na povrchoch dosky (t.j. pre $x = \pm d/2$) má zložku len v smere osi z (obr. 2). Pre amplitúdu tohto vektora platí $H_m = |\mathcal{H}_0|$. Potom z riešenia vlnovej rovnice [2], [3] pre rozloženie z - ovej zložky fázora intenzity magnetického poľa (obr. 2) v doske dostávame

$$\mathcal{H}_z(x) = \mathcal{H}_0 \cdot \frac{\cosh \gamma x}{\cosh \gamma\, d/2} \tag{1}$$

kde γ je konštanta šírenia elektromagnetickej vlny v doske pre ktorú platí

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\chi} \tag{2}$$

Mieru povrchového javu charakterizuje hĺbka vniku ϑ, ktorá je daná v prípade vodivého prostredia ($\chi \gg \omega\varepsilon$) vzťahom

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\chi}} \tag{3}$$

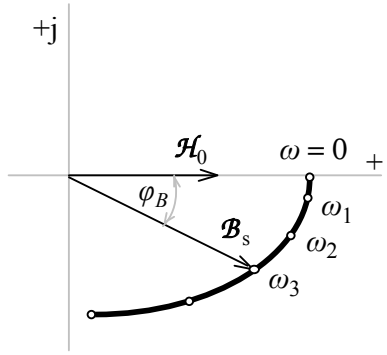
Hĺbka vniku je vzdialenosť od povrchu, pri ktorej klesnú amplitúdy vektorov intenzít elektrického a magnetického poľa na 1/e násobok, t.j. na 36,8 % svojich hodnôt na povrchu. Čím bude pomer medzi hrúbkou dosky d a hĺbkou vniku ϑ väčší, tým bude vplyv magnetického resp. elektrického skinefektu vyšší. V dôsledku rastu frekvencie klesá veľkosť hĺbky vniku a tým klesá aj stredná hodnota magnetického toku v priereze dosky. Pre strednú hodnotu fázora magnetickej indukcie platí

$$\mathcal{B}_s = \frac{1}{d} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{B}_z(x).\mathrm{d}x = 2\mathcal{B}_0 \cdot \frac{\mathrm{tgh}(\gamma\, d/2)}{\gamma d} = B_s.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_B} \tag{4}$$

kde $\mathcal{B}_0$ je fázor magnetickej indukcie na povrchu dosky daný vzťahom

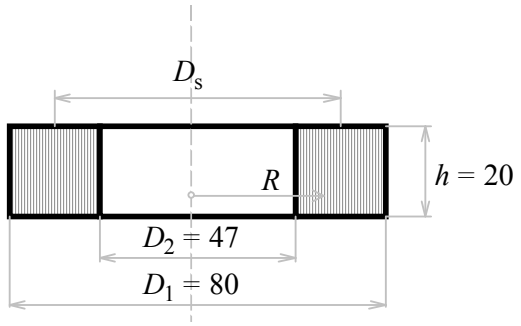
$$\mathcal{B}_0 = \mu \cdot \mathcal{H}_0 \tag{5}$$

a μ je permeabilita feromagnetickej vodivej dosky. Ak fázu fázora $\mathcal{H}_0$ zvolíme rovnú nule, je hodograf frekvenčnej závislosti fázora $\mathcal{B}_s$ (pre dané materiálové konštanty) daný vzťahom (4) znázornený na obr. 3.



Obr. 3 Hodograf frekvenčnej závislosti fázora strednej hodnoty indukcie $\mathcal{B}_s$

Experimentálnu verifikáciu teoretickej závislosti strednej hodnoty fázora magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ od frekvencie môžeme s uvážením viacerých zjednodušení realizovať pomocou merania na prstencovej vzorke. Rozľahlú feromagnetickú dosku predstavuje izolovaný pás elektrotechnickej oceli $Fe_{97}Si_3$ špirálovite stočený do prstenca (toroidu), ktorého rozmery sú na obr. 4. Pri hrúbke pásu d = 0,3 mm je pomer hrúbky k jeho šírke d/h = 0,015 a rozmer v smere vonkajšieho poľa $\boldsymbol{H}_0$ môžeme považovať za neohraničený. Vonkajšie pole $\boldsymbol{H}_0$ vytvoríme pomocou budiaceho vinutia s počtom závitov N_1, rovnomerne rozložených po obvode prstencovej vzorky. Veľkosť fázora strednej hodnoty magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ určíme z merania indukovaného napätia U_i, ktoré sa indukuje v snímacích závitoch s počtom N_2 navinutých okolo prstenca.



Obr. 4 Prstencová vzorka feromagnetického materiálu

Efektívna hodnota harmonického indukovaného napätia je daná vzťahom

$$U_i = 4{,}44 . f . N_2 . S . B_s \tag{6}$$

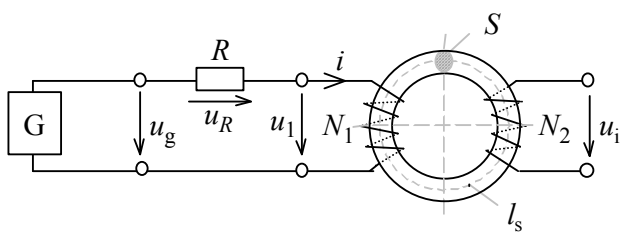
kde S je prierez feromagnetického prstenca a f je frekvencia harmonicky sa meniacej intenzity magnetického poľa. Aby hodnota indukovaného napätia v snímacích závitoch bola dostatočne vysoká, je špirálovite navinutých viacero vrstiev oceľového pásu. Tým ale každý prstenec s rôznym polomerom R má rôznu hodnotu intenzity magnetického poľa H_0 na jeho povrchoch. Získaná hodnota indukovaného napätia je preto ustrednenou hodnotou príspevkov individuálnych prstencov. Ustrednenie z hľadiska intenzity magnetického poľa na povrchoch individuálnych prstencov zohľadníme zavedením tzv. "strednej dĺžky siločiary" pri výpočte amplitúdy strednej hodnoty intenzity magnetického poľa podľa vzťahu

$$H_0 = \frac{N_1.I_m}{l_s} = \frac{\sqrt{2}N_1.I}{l_s} \tag{7}$$

kde $l_s = \pi.D_s$ je stredná dĺžka siločiary, $D_s = (D_1 + D_2)/2$, N_1 je počet závitov magnetujúceho vinutia a I_m je maximálna hodnota magnetujúceho prúdu. Aby boli obidva časové priebehy $H(t)$ a $B(t)$ harmonické (predpoklad teoretického riešenia je μ = konšt.), musí byť feromagnetický materiál magnetovaný v oblasti veľmi nízkych magnetických polí, kde môžeme závislosť $B = f(H)$, ktorá je vo všeobecnosti nelineárna, považovať za lineárnu, t.j. $B = \mu H$.

Postup pri meraní.

Schéma zapojenia je uvedená na obr. 5. Prstencová vzorka (toroid) navinutá z izolovaného pásu elektrotechnickej oceli je ovinutá magnetujúcim vinutím, rovnomerne rozloženým po celom obvode vzorky, s počtom závitov N_1 a snímacím vinutím s počtom závitov N_2. Zdrojom harmonického magnetujúceho prúdu i je generátor G harmonického napätia s možnosťou regulácie veľkosti napätia u_g a frekvencie f. Pomocou voltmetra máme možnosť merať efektívne hodnoty napätí U_g, U_R, U_1 a U_i.



Obr. 5 Schéma zapojenia. Počet magnetujúcich závitov N_1 = 32, počet snímacích závitov N_2 = 161, hodnota snímacieho odporu R = 57,41 Ω, hodnota odporu magnetujúceho vinutia R_{N_1} = 0,7 Ω.

Pri meraní postupujeme nasledovne:

1. Na určenie magnetickej permeability μ (podľa úlohy 1) pri frekvencii f = 120 Hz a intenzite magnetického poľa H_0 = 0,2 A/m nastavíme na generátore zvolenú frekvenciu f a zmenou napätia U_g nastavíme magnetizačný prúd I na takú hodnotu, ktorá odpovedá zvolenej intenzite magnetického poľa H_0. Pretože velkosť prúdu I určujeme meraním napätia na odpore R = 57,41 Ω, je napätie U_R odpovedajúce zvolenej intenzite magnetického poľa H_0 dané vzťahom

$$U_R = I.R = \frac{l_s.H_0}{N_1.\sqrt{2}} \cdot R \tag{8}$$

Túto hodnotu U_R udržiavame konštantnú zmenou výstupného napätia U_g pri každej frekvencii.

2. Pri danej hodnote napätia U_R a frekvencii f = 120 Hz odmeriame veľkosť indukovaného napätia U_i a vypočítame hodnotu magnetickej permeability μ, definovanej ako pomer amplitúd strednej hodnoty magnetickej indukcie a intenzity magnetického poľa na povrchu zo vzťahu

$$\mu = \frac{B_s}{H_0} = \frac{U_i}{4{,}44.f.N_2.S.H_0} \tag{9}$$

kde $S = h.(D_1 - D_2)/2$ je prierez toroidálnej vzorky (obr. 4), keď sme zanedbali vplyv hrúbky izolácie medzi jednotlivými vrstvami navinutej pásovej elektrotechnickej oceli.

3. Pri meraní frekvenčnej závislosti podľa úlohy 3 postupujeme tak, že postupne zvyšujeme frekvenciu generátora na najbližšiu vyššiu hodnotu (z doporučeného radu frekvencií 120, 200, 500, 750, 1000, 1300, 1600, 2200, 3000, 4000, 5000, 6000, 8000, 10 000 Hz). Pre každú z požadovaných hodnôt frekvencií nastavíme opäť vypočítanú hodnotu napätia U_R a zmeriame napätia U_i a U_g. Pri nastavovaní napätia U_R (pri každej frekvencii) postupujeme citlivo, aby nedošlo k prekročeniu hodnoty H_0 = 0,2 A/m. Veľké zmeny magnetujúceho prúdu spôsobia v dôsledku nelinearity a hysterézie magnetizačného procesu zmenu magnetického stavu vzorky, ktorá bola pred vlastným meraním odmagnetovaná, a tým aj zmenu permeability

pri rovnakej intenzite magnetického poľa na povrchu. Meranie opakujeme pre všetky doporučené frekvencie, hodnoty napätí U_i a U_g zaznamenáme do tabuľky.

Spracovanie výsledkov

Hodnoty veľkosti B_s a fázy φ_B fázora strednej hodnoty magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$, ktorá je v teoretickom úvode udávaná ako integrálna veličina, prezentujúca rozloženie magnetickej indukcie elektromagnetickej vlny vo feromagnetiku, môžeme vypočítať pre rôzne uhlové frekvencie ω podľa vzťahu (4), ak poznáme potrebné materiálové konštanty χ a μ, ktoré vystupujú vo vzťahu pre konštantu šírenia γ. Elektrická vodivosť materiálu vzorky χ, ktorou je zliatina FeSi, je $\chi = 3{,}3.10^6$ S/m. Keďže pri frekvencii $f = 120$ Hz je fázor magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ prakticky vo fáze s fázorom $\mathcal{B}_0$ ($\varphi_B = 0$), budeme hodnotu permeability μ získanú experimentálne (danú vzťahom (9)) pri frekvencii $f = 120$ Hz považovať za materiálovú konštantu μ vystupujúcu vo vzťahoch pre fázor $\mathcal{B}_s$, nezávislú na zmene frekvencie.

Experimentálne určenie fázora strednej hodnoty magnetickej indukcie $\mathcal{B}_s$ urobíme nasledovne: Veľkosť fázora strednej hodnoty magnetickej indukcie B_s určíme pre každú zvolenú frekvenciu z nameraných efektívnych hodnôt indukovaného napätia U_i využitím vzťahu (6) v tvare:

$$B_s = \frac{U_i}{4{,}44.f.N_2.S} \tag{11}$$

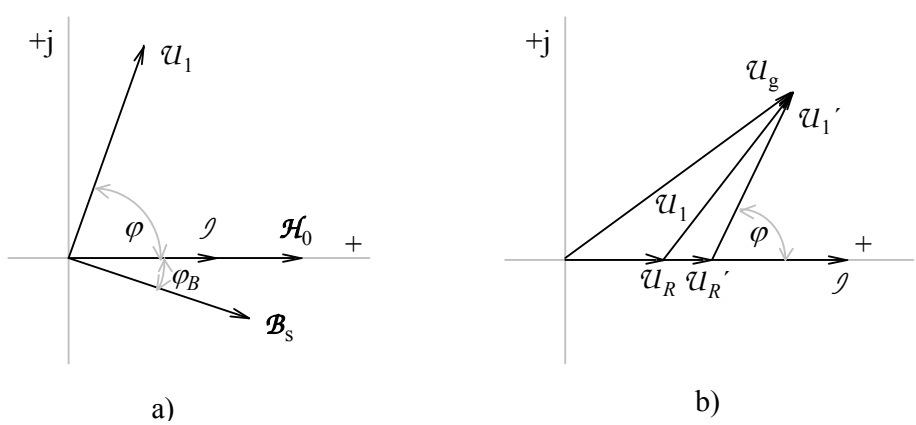
Fázový posuv φ_B medzi fázormi $\mathcal{B}_s$ a $\mathcal{H}_0$ (obr. 6a) určíme na základe merania fázového posuvu φ medzi fázorom napätia $\mathcal{U}_1$, (keďže pre fázory platí $\mathcal{U}_1 \sim j\mathcal{B}_s$) a fázorom budiaceho prúdu $\mathcal{I}$, pričom ich vzájomný vzťah je zrejmý z fázorového diagramu na obr. 6a. Na určenie fázového posuvu φ môžeme využiť tzv. metódu merania troch napätí. Ako vyplýva z obr. 5 pre fázory napätí $\mathcal{U}_g$, $\mathcal{U}_R$ a $\mathcal{U}_1$ platí:

$$\mathcal{U}_g = \mathcal{U}_R + \mathcal{U}_1 \tag{12}$$

Fázor napätia $\mathcal{U}_1$ však nie je presne vo fáze s fázorom indukovaného napätia $\mathcal{U}_i$ z dôvodu nenulového odporu vinutia N_1 magnetujúcej cievky. V prípade našej vzorky je hodnota odporu magnetujúcej cievky $R_{N_1} = 0{,}7\ \Omega$. Zavedením fázorov $\mathcal{U}_1'$ a $\mathcal{U}_R'$, ktorých fázorový diagram je na obr. 6b ako

$$\mathcal{U}_1' = \frac{N_1}{N_2} \cdot \mathcal{U}_i \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}_R' = \mathcal{U}_R + \mathcal{I} \cdot R_{N_1} \tag{13}$$

môžeme na určenie fázy φ využiť trojuholník napätí U_g, U_1', U_R', čím vylúčime chybu merania vplyvom úbytku napätia na odpore magnetujúcej cievky.



Obr. 6

Uhol φ (obr. 6b) určíme z kosínusovej vety

$$\cos\varphi = \frac{U_g^2 - U_R'^2 - U_1'^2}{2.U_R'.U_1'} \tag{14}$$

kde pre napätia platí:

$$U_R^{'} = U_R \cdot \left[1 + \frac{R_{N_1}}{R}\right] \qquad \text{a} \qquad U_1^{'} = \frac{N_1}{N_2} \cdot U_\mathrm{i} \tag{15}$$

Keďže (ako vidno z obr. 6b) platí $\varphi_B + \varphi = \pi/2$, dostávame vzťah pre fázové oneskorenie φ_B fázora strednej hodnoty indukcie $\mathcal{B}_\mathrm{s}$ za fázorom intenzity magnetického poľa na povrchu $\mathcal{H}_0$

$$\varphi_B = \varphi - \pi/2 \tag{16}$$

Tabuľka nameraných a vypočítaných hodnôt

H_0 = 0,2 A/m U_R [mV] = μ [H/m] =

experimentálne výsledky							teoret. hodnoty	
hodnoty namerané			hodnoty vypočítané				(vypočítané)	
f [Hz]	U_g [mV]	U_i [mV]	U_R' [mV]	U_1' [mV]	B_s [mT]	φ_B [°]	B_s [mT]	φ_B [°]

Dodatok

Vzťah pre výpočet intenzity magnetického poľa vo vzorke ktorá má tvar prstenca, tzv. uzatvorený magnetický obvod, získame pomocou "zákona prietoku"

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum i = N.i \tag{1}$$

ktorý vyplýva (použitím Stokesovej vety) z prvej Maxwellovej rovnice, ktorá v prípade $\chi \gg \omega\varepsilon$ má tvar

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{2}$$

Ak integráciu po uzatvorenej dráhe uskutočníme po kružnici o polomere R_0, potom v prípade prstencovej vzorky bude mať dráhový element d$\boldsymbol{r}$ vždy rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{H}$ a teda platí

$$2\pi.R_0.H(t) = N_1.i(t) \tag{3}$$

kde N_1 je počet závitov magnetujúcej cievky. Z uvedeného vyplýva, že intenzita magnetického poľa v prstenci narastá od vonkajšieho priemeru prstenca k priemeru vnútornému. Stredná hodnota intenzity mag. poľa je potom definovaná pre "strednú dĺžku" $l_s = \pi D_s$, ak $D_1/D_2 < 1{,}4$.

Indukované napätie v snímacom vinutí N_2 pri ľubovolnom periodickom spôsobe magnetovania nemá jednosmernú zložku, takže platí

$$\int_0^T |u_\mathrm{i}(t)|.\mathrm{d}t = 2\Delta\Psi_\mathrm{s} = 2(\Psi_\mathrm{smax} - \Psi_\mathrm{smin}) \tag{4}$$

kde ψ_smax je maximálna hodnota stredného viazaného magnetického toku a ψ_smin jeho minimálna hodnota. Stredná hodnota indukovaného napätia je definovaná vzťahom

$$U_\mathrm{is} = \frac{1}{T}\int_0^T |u_\mathrm{i}(t)|.\mathrm{d}t \tag{5}$$

a teda

$$\Delta\psi_\mathrm{s} = \frac{U_\mathrm{is}.T}{2} \tag{6}$$

V prípade symetrického magnetovania, keď $\psi_\mathrm{smax} = -\psi_\mathrm{smin}$ a teda $\Delta\psi_\mathrm{s} = 2.\psi_\mathrm{sm}$, dostávame pre amplitúdu strednej hodnoty viazaného magnetického toku

$$\psi_\mathrm{sm} = \frac{U_\mathrm{is}}{4f} \tag{7}$$

a pri harmonickej zmene magnetického toku, tým aj indukovaného napätia, platí pre efektívnu hodnotu indukovaného napätia vzťah

$$U_\mathrm{i} = \frac{\pi}{2.\sqrt{2}} \cdot U_\mathrm{is} = 4{,}44.f.\psi_\mathrm{sm} = 4{,}44.f.N_2.S.B_\mathrm{sm} \tag{8}$$

Literatúra:

[1] Šumichrast, Ľ., Gonda, P., Kollár, M., Jasenek, J.: Teória elektromagnetického poľa. Zbierka riešených príkladov. Alfa, Vydavateľsvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1985

[2] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL Praha, 1982

[3] Benda, O.: Teoretická elektrotechnika III., skriptá ES SVŠT Bratislava, 1963