OVERENIE BIOT - SAVARTOVHO ZÁKONA MERANÍM.

Vladimír Jančárik, Elemír Ušák

Úloha.

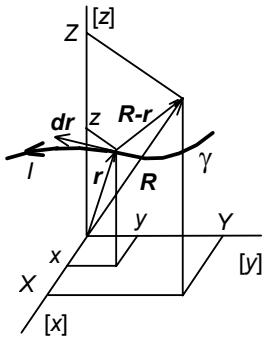
1. Overte Biot-Savartov zákon meraním intenzity poľa na osi kruhovej cievky.
2. Odmerajte rozloženie intenzity magnetického poľa pozdĺž jednej osi v rovine cievky.
3. Odmerajte rozloženie intenzity magnetického poľa na osi Helmholtzových cievok.
4. Získané závislosti znázornite graficky. Hodnoty odmerané v úlohách 1 a 2 v niekoľkých bodoch porovnajte s vypočítanými.

Analýza úlohy.

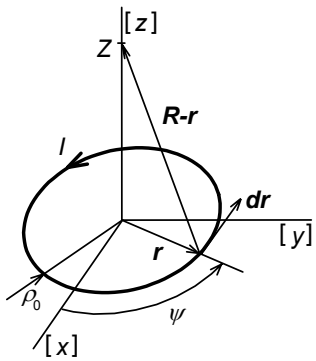
Vektorový tvar Biot - Savartovho zákona

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \frac{I}{4\pi}\int_{\gamma} \frac{\boldsymbol{dr}\times(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|^3} \tag{1}$$

vyjadruje intenzitu magnetického poľa v bode určenom polohovým vektorom $\boldsymbol{R}$ vyvolaného líniovým vodičom pretekaným prúdom I, $\boldsymbol{dr}$ je vektorový element krivky γ zhodnej orientácie ako orientácia krivky (obr. 1).



Obr. 1. K formulácii Biot - Savartovho zákona.



Obr. 2. Prípad kruhového prúdovodiča.

Vezmime si prípad kruhového vodiča o polomere ρ_0 uloženého v rovine xy so stredom v začiatku súradnicovej sústavy (obr. 2). Vektor $\boldsymbol{r}$ bude polohovým vektorom bodov takéhoto vodiča, pričom platí

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{u}_x + y\boldsymbol{u}_y = \rho_0\boldsymbol{u}_\rho \tag{2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho_0\,,\ x = \rho_0\cos\psi\,,\ y = \rho_0\sin\psi\,, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y, \boldsymbol{u}_z$ sú jednotkové vektory v smere osí súradnicovej sústavy, x, y, z sú súradnice bodu daného polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$.

Potom pre vektor $\boldsymbol{dr}$ platí

$$\boldsymbol{dr} = \rho_0\left(-\sin\psi.\boldsymbol{u}_x + \cos\psi.\boldsymbol{u}_y\right)d\psi = \rho_0\boldsymbol{u}_\psi d\psi\,. \tag{4}$$

Keďže vyšetrujeme intenzitu poľa len na osi z, pre vektor $\boldsymbol{R}$ platí

$$\boldsymbol{R} = Z.\boldsymbol{u}_z\,. \tag{5}$$

Po takomto sparametrizovaní kružnice a po dosadení do vzťahu (1) dostávame

$$\boldsymbol{H}(0,0,Z)=\frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{u}_\psi\times\left(Z.\boldsymbol{u}_z-\rho_0.\boldsymbol{u}_\rho\right)}{\left[Z^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\rho_0 d\psi=\frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Z.u_\rho+\rho_0.u_z}{\left[Z^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\rho_0 d\psi \qquad (6)$$

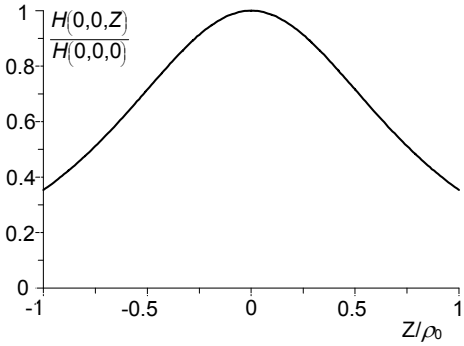
a po integrovaní pre vektor $\boldsymbol{H}$ platí

$$\boldsymbol{H}(0,0,Z)=\frac{I}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{\left[Z^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\,. \qquad (7)$$

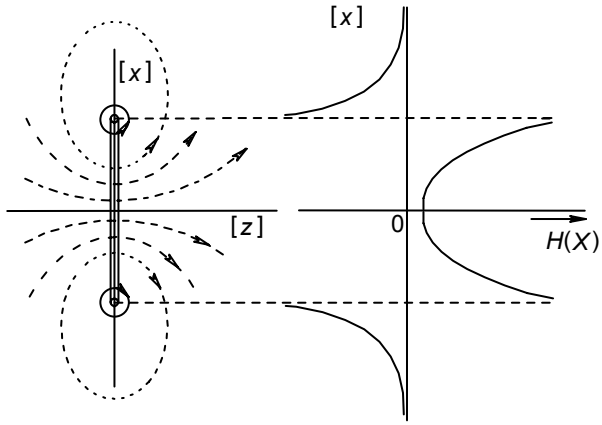
Uvažujme namiesto jedného kruhového závitu cievku s polomerom ρ_0, ktorá má N závitov uložených tesne vedľa seba (teda všetky závity budú mať približne rovaký polomer a budú ležať približne v rovine xy). Ak touto cievkou tečie prúd I, potom pre výpočet vektora intenzity magnetického poľa na jej osi môžeme použiť upravený vzťah (7)

$$\boldsymbol{H}(0,0,Z)=\frac{NI}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{\left[Z^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\,. \qquad (8)$$

Na obr. 3 je ilustrovaný priebeh veľkosti intenzity poľa na osi z $H(0,0,Z)$ pre $Z/\rho_0\in\langle -1;1\rangle$.



Obr. 3. Rozloženie veľkosti intenzity poľa na osi kruhovej cievky.



Obr. 4. Znázornenie siločiar v okolí kruhovej cievky a rozloženie poľa pozdĺž osi v jej rovine.

Na obr. 4 je znázornený tvar siločiar v okolí kruhovej cievky a zároveň rozloženie veľkosti intenzity magnetického poľa pozdĺž osi x.

Intenzita poľa dvojice rovnakých cievok s polomerom ρ_0 koaxiálne umiestnených na osi z, ktorých stredy sú v bodoch $(0,0,-m)$ a $(0,0,+m)$, je daná superpozíciou ich príspevkov $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$

$$\boldsymbol{H}_1(0,0,Z)=\frac{NI}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{\left[(Z-m)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\,,\ \boldsymbol{H}_2(0,0,Z)=\frac{NI}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{\left[(Z+m)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\,, \qquad (9)$$

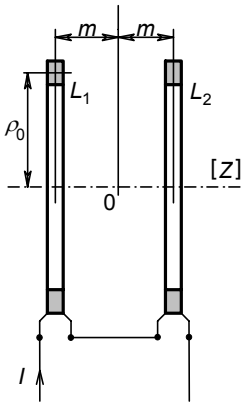
$$\boldsymbol{H}(0,0,Z)=\boldsymbol{H}_1(0,0,Z)+\boldsymbol{H}_2(0,0,Z)\,. \qquad (10)$$

Vo vzťahu (10) predpokladáme, že prúdy oboma cievkami tečú navzájom súhlasným smerom (ak by tak nebolo, treba príslušne zmeniť znamienka pri jednotlivých príspevkoch).

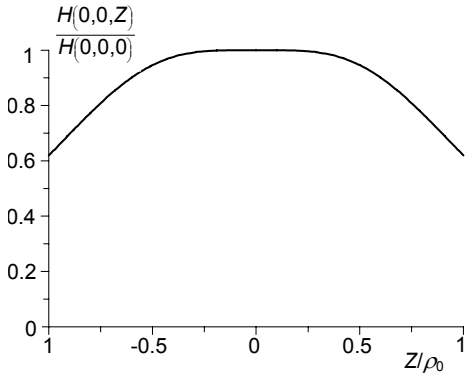
Helmholtzovými cievkami sa nazýva také usporiadanie dvoch rovnakých koaxiálne uložených tenkých kruhových cievok s N závitmi pretekaných rovnakým prúdom I, že ich vzájomná vzdialenosť $2m$ je rovná ich polomeru ρ_0, teda

$$m = \frac{\rho_0}{2}\,. \tag{11}$$

Helmholtzove cievky sú znázornené na obr. 5.



Obr. 5. Hemholtzove cievky.



Obr. 6. Rozloženie veľkosti intenzity magnetického poľa na osi Helmholtzových cievok.

Cievky sú zapojené tak, že prúdy nimi pretekajúce sú orientované súhlasne, teda pre výsledný vektor intenzity poľa platí priamo vzťah (10). Po dosadení rovníc (9) do vzťahu (10) a po uvážení rozmerového pravidla (11) platiaceho pre Helmholtzove cievky dostávame

$$\boldsymbol{H}(0,0,Z) = \frac{NI}{2}\rho_0^2\left\{\frac{1}{\left[(Z-\rho_0/2)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[(Z+\rho_0/2)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\right\}\boldsymbol{u}_z\,. \tag{12}$$

Helmholtzove cievky sa v technickej praxi využívajú tam, kde potrebujeme v určitom priestore vytvoriť homogénne pole. Na obr. 6 je znázornené rozloženie veľkosti intenzity poľa pozdĺž osi takýchto cievok. Vidíme, že v strede medzi cievkami sa s premennou Z veľkosť intenzity poľa mení len málo. Dá sa ľahko vypočítať, že intenzita poľa v bodoch $(0,0,-m)$ a $(0,0,m)$ je menšia len o 5,38 % oproti hodnote v bode $(0,0,0)$.

Ak cievkou (alebo Helmholtzovými cievkami) preteká prúd s harmonickým časovým priebehom, tak aj magnetické pole vytvorené takýmito cievkami bude mať harmonický časový priebeh. Potom môžeme vzťahy (8) a (12) prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{H}_m(0,0,Z) = \frac{NI_m}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{\left[Z^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\,, \tag{13}$$

resp.

$$\boldsymbol{H}_m(0,0,Z) = \frac{NI_m}{2}\rho_0^2\left\{\frac{1}{\left[(Z-\rho_0/2)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[(Z+\rho_0/2)^2+\rho_0^2\right]^{3/2}}\right\}\boldsymbol{u}_z\,, \tag{14}$$

kde $\boldsymbol{H}_m$ je vektor amplitúdy intenzity magnetického poľa na osi z, I_m je amplitúda prúdu pretekajúceho cievkou, resp. cievkami. Je teda zrejmé, že rozloženie striedavého poľa bude zhodné, ako rozloženie jednosmerného poľa.

Na experimentálne vyšetrenie rozloženia intenzity striedavého magnetického poľa sa dá využiť *snímacia cievka*. Rozmery snímacej cievky sú malé - znamená to, že hustotu magnetického toku (magnetickú indukciu) v jej priereze môžeme s dostatočnou presnosťou považovať za homogénnu.

Nech má merná cievka N_S závitov a plochu S a nech sa nachádza v striedavom magnetickom poli. Okamžitá hodnota napätia u_i, ktoré sa indukuje, je daná vzťahom

$$u_i = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad \Phi(t) = N_S \Phi_1(t) \tag{15}$$

kde $\Phi(t)$ je celkový magnetický tok viazaný všetkými závitmi cievky, $\Phi_1(t)$ je magnetický tok viazaný jedným závitom. Ďalej platí

$$\Phi_1(t) = SB(t) = S\mu_0 H(t) \tag{16}$$

kde $B(t)$ je magnetická indukcia a $H(t)$ je intenzita poľa v mieste cievky. Predpokladáme, že sústava sa nachádza v prostredí s permeabilitou μ_0. Uvažujme magnetické pole s harmonickým časovým priebehom, amplitúdou H_m a uhlovou frekvenciou ω

$$H(t) = H_m.\sin(\omega t) \tag{17}$$

potom pre okamžitú hodnotu indukovaného napätia platí

$$u_i(t) = \frac{d}{dt}\left[N_S S\mu_0 H_m \sin(\omega t)\right] = N_S S\mu_0 H_m \omega \cos(\omega t) \tag{18}$$

a pre jeho amplitúdu U_{im}

$$U_{im} = N_S S\mu_0 H_m \omega \tag{19}$$

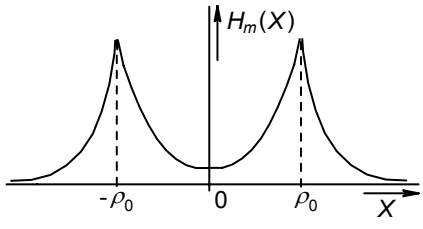
Na meranie indukovaného napätia sa zväčša používajú striedavé milivoltmetre, ktoré pri meraní harmonického napätí ukazujú jeho efektívnu hodnotu. Pre efektívnu hodnotu indukovaného napätia U_i platí

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{2}} N_S S\mu_0 H_m \omega . \tag{20}$$

Po substitúcii $\omega = 2\pi f$ a úprave dostávame

$$U_i = 4{,}443 N_S S\mu_0 H_m f \tag{21}$$

POZNÁMKA:

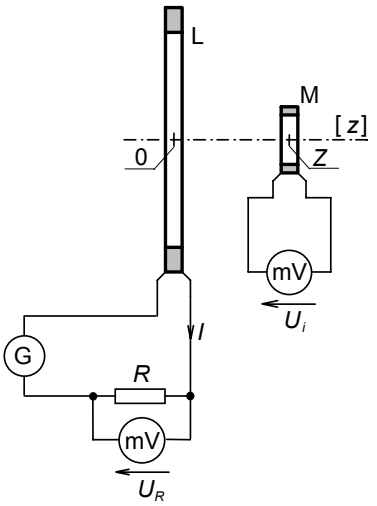


Pri vyšetrovaní rozloženia poľa pozdĺž osi v tesnej blízkosti roviny cievky (napr. pozdĺž osi x) pomocou striedavého prúdu a mernej cievky meriame amplitúdu tohoto poľa, teda výsledky môžu byť len kladné čísla a dostaneme priebeh znázornený na obr. 9 (porovnajte s obr. 4). Ak by sme chceli meraním získať závislosti z obr. 4, museli by sme cievku napájať jednosmerným prúdom a merať sondou rozlišujúcou orientáciu poľa (napr.

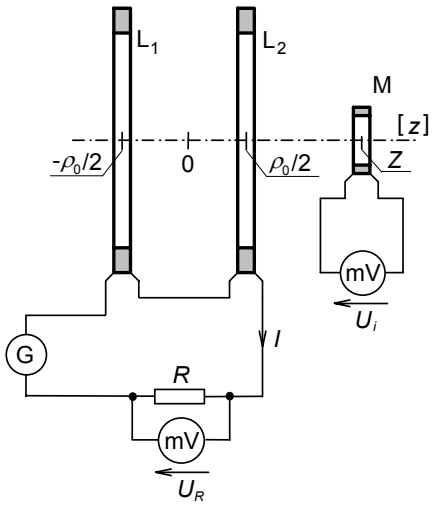
Hallovou sondou).

Obr. 9. Rozloženie amplitúdy intenzity mag. poľa na osi v rovine cievky.

Postup pri meraní.



Obr. 7. Zapojenie s jednou cievkou.



Obr. 8. Zapojenie s Helmholtzovými cievkami.

1. Na funkčnom generátore nastavíme harmonický tvar výstupného napätia a frekvenciu $f = 20$ kHz. Skontrolujeme, či je nastavená nulová zložka výstupného napätia (jednosmerná zložka v tomto prípade nemôže ovplyvniť výsledky merania, avšak zbytočne by sa zaťažoval generátor).
2. Na svorkovnici zapojíme obvod s jednou cievkou (pravou).
3. Na multimetri zvolíme režim striedavého milivoltmetra a pripojíme jeho vstup paralelne k rezistoru R. Nastavíme také výstupné napätie, aby efektívne napätie U_R na snímacom rezistore R bolo 0,5 V. Potom pre amplitúdu prúdu cievkou bude platiť

$$I_m = \frac{\sqrt{2}.U_R}{R} = 0{,}07071\text{A}\,. \qquad (22)$$

4. Na vstup multimetra pripojíme vývody snímacej cievky. Posúvaním snímacej cievky v smere osi z odmeriame v krokoch 10 mm efektívnu hodnotu napätia U_i, ktoré sa v nej indukuje. Pomocou vzťahu (21) z indukovaného napätia vypočítame príslušné hodnoty amplitúdy intezity magnetického poľa a zapíšeme ich do tabuľky. Merania robíme pre $Z \in \langle -100;+100 \rangle$ mm.
5. Posúvaním mernej cievky v smere osi x odmeriame rozloženie poľa v tesnej blízkosti roviny pravej cievky.
6. Na svorkovnici zapojíme obvod s dvoma cievkami. Skontrolujeme vzdialenosť medzi cievkami L_1 a L_2 (obr. 7), či vyhovuje vlastnostiam Helmholtzových cievok. Na generátore nastavíme také výstupné napätie, aby opäť $I_m = 0{,}07071$A.
7. Podobne ako v bode 4 odmeriame rozloženie amplitúdy intenzity magnetického poľa pozdĺž osi z.
8. V niekoľkých bodoch porovnáme namerané a vypočítané výsledky. V prípade merania na jednej cievke porovnanie urobíme napríklad pre $Z = \pm 100$mm, $Z = 0$. V prípade dvoch cievok navyše aj v bodoch $Z = \pm\rho_0/2$. Príčinu prípadných odchýliek treba vysvetliť.

Súpis prístrojov:

G - funkčný generátor

mV - striedavý milivoltmeter
R - snímací rezistor 10Ω

Parametre cievok L, L_1, L_2:
- počet závitov $N = 40$
- polomer $\rho_0 = 50$ mm

Parametre snímacej cievky M:
- počet závitov $N_S = 100$
- plocha $S = 1{,}039.10^{-4}$ m^2

Spracovanie výsledkov.

Tabuľka nameraných a vypočítaných údajov

Meranie s jednou cievkou			Meranie v rovine cievky			Meranie s dvomi cievkami		
Z (mm)	U_i (mV)	H_m (A/m)	X (mm)	U_i (mV)	H_m (A/m)	Z (mm)	U_i (mV)	H_m (A/m)
-100			-100			-100		
-90			-90			-90		
-80			-80			-80		
...			...			...		
80			80			80		
90			90			90		
100			100			100		