VÍRIVÉ PRÚDY
Vodič obdĺžnikového prierezu v drážke z feromagnetika

I. Bojna

Označovanie veličín v texte:

u, i, J_{ok}, H_{ok}, - okamihové hodnoty harmonických veličín,
U, I - efektívne hodnoty harmonického napätia a prúdu,
E, J, H - maximálne hodnoty (amplitúdy) harmonicky sa meniacich priebehov (intenzita elektrického poľa, prúdová hustota, intenzita magnetického poľa),
U, I , E, H, J, ϕ_c - fázory harmonických priebehov, pričom **modul fázorov je amplitúda** (max. hodnota) harmonického priebehu,
$U e^{j\omega t}$, $I e^{j\omega t}$, ... - rotujúce fázory,
Z_0, γ - komplexné konštanty,
Z, α, β, ε, μ, $\varkappa$, ω, ρ - reálne konštanty
E, H, J - vektory (okamihové hodnoty časovo premenlivých vektorov),
$\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_z$ - jednotkové vektory,
E, H, J - komplexné vektory (**E** = Re {***E***}).

1. ÚLOHA

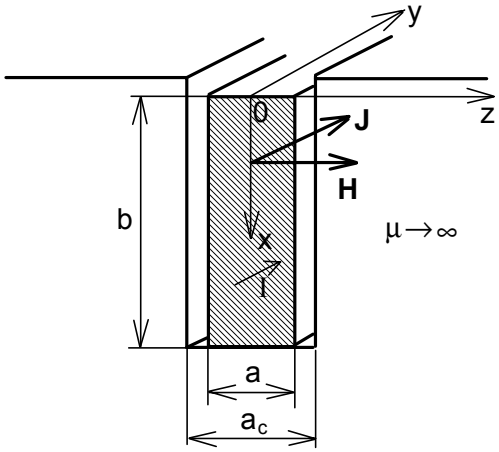
Vodičom obdĺžnikového prierezu uloženom v drážke z feromagnetika prechádza harmonický prúd.

1. a) Meraním stanovte rozloženie prúdovej hustoty vo vodiči.
b) Meraním stanovte rozloženie intenzity magnetického poľa vo vodiči.
c) Výsledky meraní porovnajte s teoretickým výpočtom.

2. Určite efektívnu hodnotu prúdu pretekajúceho vodičom zo známej hodnoty
a) prúdovej hustoty na hornom povrchu vodiča určenej meraním,
b) intenzity magnetického poľa na hornom povrchu vodiča určenej meraním.

2. ANALÝZA ÚLOHY

Budeme vyšetrovať elektromagnetické pole v kovovom vodiči obdĺžnikového prierezu, napájanom harmonickým prúdom a uloženom vo feromagnetickej drážke (obr. 2.1).



Obr. 2.1

Prúd vo vodiči má smer osi y. Feromagnetický materiál tvoriaci drážku má veľkú permeabilitu $\mu \gg \mu_0$ a môžeme ho preto považovať za ideálne feromagnetikum ($\mu \to \infty$). Predpokladáme, že feromagnetická drážka a vodič v nej uložený sú v smere osi y dostatočne dlhé, možno teda zanedbať okrajové účinky na koncoch drážky. V takom prípade veličiny elektromagnetického poľa nie sú funkciou súradnice y. Dá sa ukázať, že v tomto prípade možno **elektromagnetické pole vo vodiči** považovať za **rovinnú elektromagnetickú vlnu, ktorá sa vo vodiči šíri v smere x** (pozri dodatok). Prúdová hustota vo vodiči i intenzita magnetického poľa závisia v tomto prípade len od súradnice x**,** jedná sa teda o **jednorozmerný prípad.** Pre fázor prúdovej hustoty J a fázor intenzity magnetického poľa H možno odvodiť nasledovné vzťahy

$$J_y(x) = \varkappa E_y(x) = J_y(0)\frac{\cosh\left[\gamma(b-x)\right]}{\cosh(\gamma b)} = J_y(x)\, e^{j\varphi_J(x)} \tag{2.1}$$

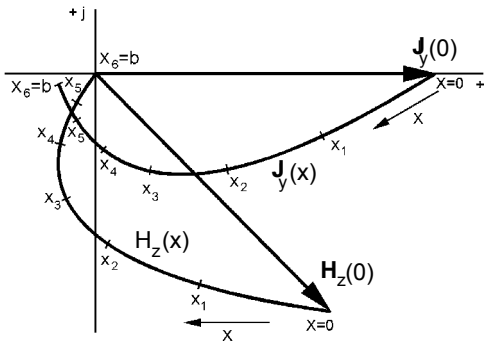
$$H_z(x) = \frac{\sinh\left[\gamma(b-x)\right]}{\sinh(\gamma b)} H_z(0) = H_z(x)\, e^{j\varphi_H(x)} \tag{2.2}$$

V týchto vzťahoch je γ konštanta šírenia. Pre dobrý vodič je aj pri najväčších používaných frekvenciách $\varkappa \gg \omega\varepsilon$, teda pre tento prípad je

$$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{j\,\omega\,\mu_0\,\varkappa} = \sqrt{\omega\,\mu_0\,\varkappa}\; e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad (\mathrm{m}^{-1}) \tag{2.3}$$

pričom β (Np.m^{-1}) je tlmiaca konštanta, α (rad. m^{-1}) je fázová konštanta. Indexami fázorov J_y, H_z sme zdôraznili orientáciu prislúchajúcich vektorov **J**, resp. **H** v priestore (v smere osi y, resp z), pozri obr. 2.1.

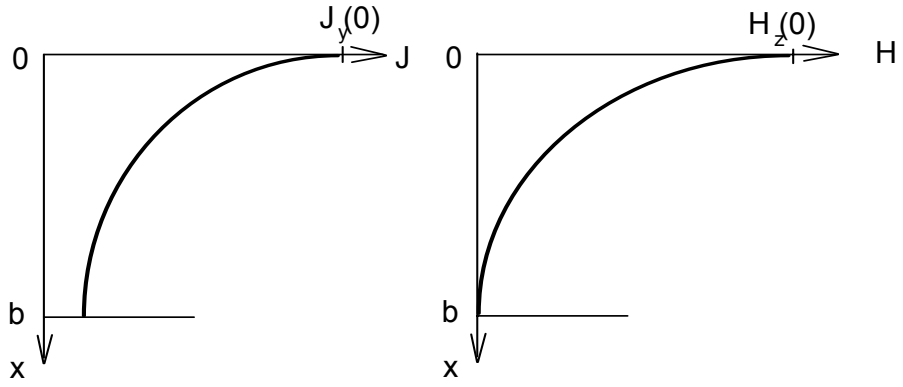
Vo vzťahoch (2.1), (2.2) sú hyperbolické funkcie komplexného argumentu (γ je komplexné), preto **funkcie** $J_y(x)$, $H_z(x)$ **kreslíme v komplexnej rovine**. Tvar týchto **komplexných funkcií** je na obr. obr. 2.2, pričom fázu (argument) fázora $J_y(0)$ v mieste x = 0 sme zvolili rovnú nule.



Obr. 2.2

Na obr. 2.3 sú závislosti prislúchajúcich modulov fázorov, pričom modul je maximálna hodnota (amplitúda) týchto harmonicky sa meniacich veličín

$$J_y(x) = \left|J_y(x)\right| \qquad H_z(x) = \left|\mathbf{H}_z(x)\right| \tag{2.4}$$



Obr. 2. 3

Na obr. 2.3 vidno, že pri časovo premenlivom (v našom prípade harmonickom) prúde vo vodiči v drážke feromagnetika dochádza k ”vytláčaniu” prúdu smerom k povrchu drážky, prúdová hustota pri povrchu drážky je väčšia ako pri jej dne. V tomto prípade ide o jednostranné vytláčanie (jednostranný elektrický povrchový jav - prúd je ”vytláčaný” v smere -x.). Skinefekt však vzniká v akomkoľvek vodiči, ak ním prechádza časovo premenlivý prúd a obvykle predstavuje nežiadúci jav. Zväčšuje sa s narastajúcou frekvenciou prúdu. V prípade vodiča v drážke z feromagnetika však skinefekt nemusí byť nepriaznivým javom, ale naopak, možno ho výhodne využiť pri niektorých aplikáciach. Napr. pri rozbehu asynchrónneho motora má zvýšený odpor vodičov (tyčí) rotora, uložených vo feromagnetických drážkach, priaznivý vplyv na rozbehové vlastnosti motora.

O hlbokej drážke hovoríme vtedy, ak rozdiel veľkostí prúdovej hustoty na povrchu a pri dne drážky je výrazný. Exaktnejšie vyjadrené, ak hĺbka vniku pri danej frekvencii prúdu je omnoho menšia ako hĺbka drážky. Hĺbka vniku ϑ má rozmer meter a charakterizuje pokles amplitúdy prúdovej hustoty v závislosti od hĺbky x. Pojem hĺbka vniku si podrobnejšie ozrejmíme pri inom laboratórnom cvičení.

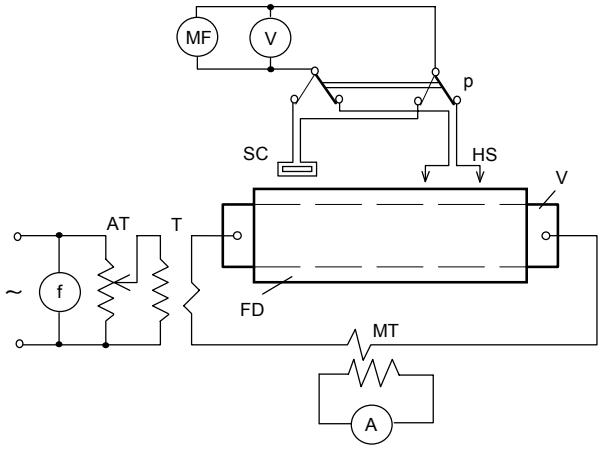
Vráťme sa ešte k obr. 2.2. Okamihovú hodnotu prúdovej hustoty $J_{ok}(x)$ a intenzity magnetického poľa $H_{ok}(x)$ v čase t = 0 dostaneme ako priemet príslušných fázorov do reálnej osi + (obr. 2.2). Znamená to, že v čase t = 0 je okamihová hodnota prúdovej hustoty napr. v miestach x = 0 až $x = x_4$ v smere osi y (je kladná), avšak v miestach x_5 , x_6 má opačný smer (je záporná). Analogicky aj v iných časoch má prúdová hustota v rôznych hĺbkach rôzny smer. Teda v každom čase tečie prúd v rôznych hĺbkach rôznym smerom. Aj tento fakt vysvetľuje známu skutočnosť, že tzv. **efektívny odpor** vodiča, ktorým prechádza časovo premenlivý prúd, je v dôsledku skinefektu väčší ako odpor vodiča pri jednosmernom stacionárnom prúde.

Elektrický skinefekt je spôsobený **vírivými prúdmi**, indukovanými vo vodiči v dôsledku časovo premenného magnetického poľa, ktoré vo vodiči vyvoláva ním prechádzajúci časovo premenný prúd. Pri danej frekvencii harmonického prúdu sa skinefekt výrazne zvyšuje s narastajúcimi rozmermi (prierezom) vodiča. Pri našich meraniach je frekvencia prúdu malá (50 Hz), preto použijeme vodič obdĺžnikového prierezu s výškou niekoľko centimetrov, aby bol skinefekt výrazný. Pri bežne používaných vodičoch, akými sú napr. spojovacie vodiče používané v laboratóriu, alebo vodiče v zásuvkových alebo svetelných obvodoch v budovách, je pri sieťovej frekvencii 50 Hz skinefekt zanedbateľný.

Cieľom našich meraní je experimentálne určiť priebehy na obr. 2.2 a 2.3.

3. POSTUP PRI MERANÍ

Schéma zapojenia



Obr. 3.1

Použité prístroje:

AT - regulačný transformátor
T - transformátor (napájací zdroj s veľkým menovitým sekundárnym prúdom)
MT - merací transformátor prúdu
f - merač frekvencie
A - ampérmeter
V - voltmeter
MF - merač fázy (elektronické zariadenie umožňujúce merať fázový posun meraného napätia voči fáze referenčného napätia)
HS - hrotová sonda (umožňujúca merať napätie medzi hrotmi sondy)
SC - skúšobná cievka (na meranie indukovaného napätia)
V - vyšetrovaný vodič obdĺžnikového prierezu
FD - feromagnetická drážka
p - prepínač

Pracovný postup

Po pripojení meracieho obvodu k zdroju napätia nastavíme regulačným transformátorom vhodný prúd I a tento počas merania udržujeme konštantný.

Meranie prúdovej hustoty v závislosti od hĺbky robíme pomocou plochej hrotovej sondy, ktorú zasúvame do drážky. Dva kovové hroty sondy sa pritom dotýkajú povrchu vodiča v rovnakej hĺbke x. Medzi hrotmi sondy je napätie, ktoré je úmerné prúdovej hustote vo vodiči v danej hĺbke. Ak je vzdialenosť medzi hrotmi sondy s, je napätie (efektívna hodnota) medzi hrotmi

$$U_s(x) = \frac{s\,E_y(x)}{\sqrt{2}} = \frac{s\,J_y(x)}{\varkappa\sqrt{2}} \qquad (3.1)$$

(Pre mosadzný vodič je konduktivita $\varkappa = 11{,}8 \,.\, 10^6$ $S.m^{-1}$).
Prúdová hustota (maximálna hodnota) je

$$J_y(x) = \frac{\sqrt{2}\,\varkappa\,U_S(x)}{s} \qquad (3.2)$$

Efektívnu hodnotu napätia $U_s(x)$ medzi hrotmi meriame voltmetrom a súčasne meračom fázy meriame fázu napätia $u_s(x)$ vzhľadom na fázu napätia $u_s(0)$ v mieste x = 0 (fázu $u_s(0)$ zvolíme rovnú nule). Fáza fázora prúdovej hustoty sa rovná fáze napätia $u_s(x)$ v danej hĺbke.

Na **určenie intenzity magnetického poľa** použijeme plochú skúšobnú cievku v tvare úzkeho obdĺžnika. Ak cievku vsunieme do drážky v smere kolmom na indukčné čiary tak, aby jej dlhšia strana bola v smere y, môžeme v prvom priblížení považovať intenzitu magnetického poľa v priereze cievky za konštantnú. Ak má cievka N závitov a plocha jedného závitu je S, pri zasunutí cievky do hĺbky x je fázor indukovaného napätia v cievke

$$\mathsf{U}_c(x) = \frac{d\phi_c}{dt} = j\,\omega\,N\,S\,\mathsf{B}_z(x) = j\,2\,\pi\,N\,S\,\mu_0\,\mathsf{H}_z(x) \qquad (3.3)$$

Efektívna hodnota napätia indukovaného v cievke je teda

$$U_c(x) = \left|\frac{\mathsf{U}_c(x)}{\sqrt{2}}\right| = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\,\mu_0\,f\,N\,S\,H_z(x) = 4{,}44\,\mu_0\,f\,N\,S\,H_z(x) \qquad (3.4)$$

a odtiaľ intenzita magnetického poľa v mieste x (maximálna hodnota)

$$H_z(x) = \frac{U_c(x)}{4{,}44\,\mu_0\,f\,N\,S} \qquad (3.5)$$

Meriame efektívnu hodnotu U_c a fázu φ_c napätia u_c indukovaného v cievke.

Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:

f = ... Hz, I = ... A Tab. 1

x [cm]	U_s [V]	$\varphi_s = \varphi_J$[°]	J_y [A/m^2]

f = ... Hz, I = ... A Tab. 2

x [cm]	U_c [V]	φ_c [°]	H_z [A/m]	$\varphi_H = \varphi_c - 90°$ [°]

4. SPRACOVANIE VÝSLEDKOV

Úloha 1a, 1b:

Komplexné funkcie fázorov $J_y(x)$ a $H_z(x)$ nakreslíme do komplexnej roviny podľa obr. 2.2, čiže tak, aby fázor $J_y(0)$ mal nulovú fázu. V tomto zmysle prepočítame všetky meraním určené fázy (uhly), čiže od všetkých uhlov určených meraním odčítame fázu fázora $J_y(0)$. V prípade hlbokej drážky uhol medzi fázormi $J_y(0)$ a $H_z(0)$ sa v prvom priblížení rovná fáze charakteristickej impedancie vodiča, čiže fázor $H_z(0)$ zaostáva za fázorom $J_y(0)$ približne o $\pi/4$ (pozri dodatok). Zároveň, ako vyplýva zo vzťahu (3.3), fázor intenzity magnetického poľa $H_z(0)$ zaostáva za fázorom indukovaného napätia v cievke U_c o $\pi/2$, čiže $\varphi_H = \varphi_c - \pi/2$. Do grafov vynesieme hodnoty určené z merania a hodnoty vypočítané zo vzťahov (9), resp. (10).

Amplitúdy prúdovej hustoty $J_y(x)$, $H_z(x)$ určené z merania nakreslíme podľa obr. 2.3.

Úloha 1c:

Do tých istých obrázkov nakreslíme zodpovedajúce závislosti určené teoretickým výpočtom. Fázory $J_y(x)$, $H_z(x)$ vypočítame pomocou vzťahov (2.1) a (2.2), pričom za $J_y(0)$, $H_z(0)$ dosadíme hodnoty určené z merania. Charakteristiky určené meraním a teoretickým výpočtom budú mať teda jeden bod spoločný ($J_y(0)$, resp. $H_z(0)$).

Úloha 2a:

Integráciou prúdovej hustoty (vzťah (2.1)) cez celý prierez vodiča dostaneme fázor prúdu I

$$\mathsf{I} = \int_S \mathsf{J}_y(x)\, dS = \int_0^b \mathsf{J}_y(x)\, a\, dx = \frac{a\ \mathsf{J}_y(0)}{\gamma}\ \mathrm{tgh}(\gamma\, b) \tag{3.6}$$

Efektívna hodnota prúdu je

$$I = \frac{|\mathsf{I}|}{\sqrt{2}} \tag{3.7}$$

Úloha 2b:

Pomocou hodnoty $H_z(0)$ určenej z merania vypočítame efektívnu hodnotu prúdu zo vzťahu (pozri dodatok, (5.23))

$$I = \frac{H(0)\ a_c}{\sqrt{2}} \tag{3.8}$$

Takto vypočítané efektívne hodnoty prúdu porovnáme s nameranou (nastavenou) hodnotou prúdu vo vodiči.

5. DODATOK

5.1 Elektromagnetické vlny

Rozborom Maxwellových rovníc (MR) sa môžeme presvedčiť, že každé časovo premenlivé (nestacionárne) elektromagnetické pole (EMP) má v podstate charakter elektromagnetickej vlny (EMV), ktorá sa šíri v priestore. V mnohých praktických prípadoch nie je vlnový charakter poľa na prvý pohľad zrejmý a pre popis daného javu ani nie je podstatný. Avšak matematická interpretácia nestacionárnych javov ako súboru vĺn umožňuje jednotný teoretický výklad a tým uľahčuje pochopenie podstaty javov.

Nestacionárne elektromagnetické pole je vo všeobecnosti charakterizované dvoma veličinami - jednou elektrickou a jednou magnetickou. Elektromagnetické vlny spravidla popisujeme vektorom intenzity elektrického poľa **E** a vektorom intenzity magnetického poľa **H**. Odvodíme najprv všeobecné rovnice popisujúce nestacionárne EMP pomocou vektorov **E** a **H**, tzv. vlnové rovnice. V ďalšom si ukážeme riešenie vlnových rovníc pre prípad harmonicky sa meniacich veličín poľa.

Uvažujme ľubovoľne sa meniace EMP v homogénnom, lineárnom a izotropnom prostredí (homogénne znamená, že vlastnosti prostredia sú na každom mieste rovnaké; lineárne znamená, že vlastnosti prostredia nezávisia od hodnôt veličín poľa; izotropné znamená, že vlastnosti prostredia sú vo všetkých smeroch rovnaké). Takéto prostredie je charakterizované materiálovými konštantami - permitivitou ε, permeabilitou μ a konduktivitou $\varkappa$. Vlnové rovnice odvodíme pre prostredie, v ktorom je objemová hustota voľného náboja $\rho_0 = 0$, čiže pre prostredie bez voľných nábojov.

Aplikujme na druhú Maxwellovu rovnicu

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.1}$$

operáciu rot. Dostaneme

$$\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{E} = -\ \mathrm{rot}\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\ \mathbf{B}) \tag{5.2}$$

Ak za rot **B** dosadíme z prvej MR

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{J} + \mu\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu\varkappa\,\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.3}$$

dostaneme

$$\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{E} + \mu\varkappa\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.3}$$

Pre $\rho_0 = 0$ je

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} = \mathrm{div}\,\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0 \tag{5.4}$$

Pri ďalšej úprave (5.3) využijeme známy vzťah z vektorového počtu

$$\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad\ div}\,\mathbf{E} - \nabla^2\,\mathbf{E} = -\nabla^2\,\mathbf{E} \tag{5.5}$$

pričom sme uvážili, že pre $\rho_0 = 0$ je podľa (5.4) div $\mathbf{E} = 0$.

Po dosadení (5.5) do (5.3) dostávame **vlnovú rovnicu** vektora $\mathbf{E}$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \varkappa\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0} \tag{5.6}$$

Analogickým postupom možno z prvej MR odvodiť rovnakú **vlnovú rovnicu** pre vektor $\mathbf{H}$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H} - \varkappa\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0} \tag{5.7}$$

Vlnové rovnice sú vektorové parciálne diferenciálne rovnice. Každá z týchto rovníc zároveň predstavuje tri skalárne rovnice pre tri zložky vektorov poľa. Napr. pri použití kartézskej súradnicovej sústavy sú premennými súradnice x, y, z a čas t. Riešením týchto parciálnych diferenciálnych rovníc pre určitý konkrétny prípad dostávame priestorové rozloženie a časové závislosti vektorov poľa $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$.

Vlnové rovnice, ktoré sme dostali úpravou všeobecne platných MR, platia pre ľubovoľné časové zmeny a tvar poľa. Veľmi často sa stretávame s prípadom, keď sa veličiny poľa menia harmonicky. V ďalšom sa budeme zaoberať práve týmto prípadom.

5.2 Rovinné harmonické elektromagnetické vlny

Vysvetlíme si najprv najjednoduchší, pritom však pre prax veľmi dôležitý prípad **rovinnej vlny**. O rovinnej elektromagnetickej vlne (REMV) hovoríme vtedy, keď vektory poľa sú (popri čase) funkciou len jednej súradnicovej premennej, napr. x, ktorá zároveň udáva smer šírenia vlny. Znamená to, že v každom okamihu sú vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ v rovinách kolmých na smer šírenia rovnaké (v uvažovanom prípade sú to roviny yz). Symbolicky to možno zapísať

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{5.8}$$

Je zrejmé, že rovinná vlna, ktorá by siahala v rovinách kolmých na smer šírenia do nekonečna, je len fikciou. Táto fikcia je však veľmi užitočná, pretože v mnohých prípadoch je vlna v dostatočnej vzdialenosti od zdroja rovinnou vlnou. Napr. ak uvažujeme v nekonečne rozľahlom prostredí zdroj elektromagnetických vĺn, ktorý vyžaruje rovnomerne všetkými smermi, elektromagnetické pole charakterizujú guľové vlnoplochy. V dostatočnej vzdialenosti od vyžarujúceho zdroja môžeme určitú časť guľovej vlnoplochy nahradiť rovinou plochou ΔS a na tejto ploche vlnu považovať za rovinnú.

S uvážením (5.8) môžeme vlnové rovnice pre prípad rovinnej vlny prepísať do tvaru

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \varkappa\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} - \varkappa\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.10}$$

Uvažujme v ďalšom **REMV meniacu sa s časom harmonicky**, ktorá má pre prax najväčší význam.

Na riešenie tohto prípadu je výhodné použiť **komplexné vektory** (***E***, ***H***), ktoré sú komplexnou reprezentáciou okamihových hodnôt fyzikálnych vektorov (**E**, **H**). Princíp náhrady okamihových hodnôt vektorov komplexnými vektormi je analogický ako náhrada okamihových hodnôt napätia a prúdu (u, i) rotujúcimi fázormi ($U(t) = U\,e^{j\omega t}$, $I(t) = I\,e^{j\omega t}$). Rozdiel oproti rotujúcim fázorom je, okrem iného, v tom, že komplexné vektory charakterizujú aj smer fyzikálnych vektorov v priestore. Platí

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{E}\} \qquad \mathbf{H} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{H}\} \tag{5.11}$$

Výhodou takéhoto postupu je, že derivácii v časovej oblasti zodpovedá pri komplexnej reprezentácii násobenie komplexnou konštantou $j\omega$. Vlnové rovnice (5.9), (5.10), ktoré sú parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, sa pri použití komplexných vektorov zmenia na obyčajné diferenciálne rovnice v tvare

$$\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dx^2} = j\omega\varkappa\mu\boldsymbol{E} - \omega^2\,\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = j\omega\mu\,(\varkappa + j\omega\varepsilon)\,\boldsymbol{E} = \gamma^2\boldsymbol{E} \tag{5.12}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{H}}{dx^2} = j\omega\varkappa\mu\boldsymbol{H} - \omega^2\,\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = j\omega\mu\,(\varkappa + j\omega\varepsilon)\,\boldsymbol{H} = \gamma^2\boldsymbol{H} \tag{5.13}$$

kde sme označili **konštantu šírenia** γ

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\varkappa + j\omega\varepsilon)} \tag{5.14}$$

Na prvý pohľad je zrejmá analógia rovníc (5.12), (5.13) s rovnicami homogénneho vedenia v ustálenom harmonickom stave, s ktorými sme sa podrobne oboznámili v predmete Elektrické obvody II

$$\frac{d^2\mathsf{U}}{dx^2} = \gamma^2\mathsf{U} \qquad \frac{d^2\mathsf{I}}{dx^2} = \gamma^2\mathsf{I} \tag{5.15}$$

Vidíme, že **rovinná harmonická EMV je opísaná rovnakým typom rovníc ako ustálený harmonický stav na homogénnom vedení**. Preto aj riešenie rovníc poľa je analogické ako pri homogénnom vedení. Táto skutočnosť nám zároveň uľahčuje predstavu o rovinnej vlne. Vieme, že riešenie rovníc (5.15) a teda aj rovníc (5.12), (5.13) možno vo všeobecnosti interpretovať ako súčet postupnej (priamej) a spätnej (odrazenej) vlny, ktoré sa šíria rovnakou rýchlosťou a navzájom opačnými smermi, a obe sa v smere šírenia exponenciálne utlmujú.

V tab. 5.1 sú uvedené **formálne korešpondujúce** veličiny homogénneho vedenia a rovinnej elektromagnetickej vlny.

Homogénne vedenie		Rovinná elektromagnetická vlna	
Rotujúci fázor napätia	$U\,e^{j\omega t}$	Komplexný vektor intenzity el. poľa	$\boldsymbol{E}$
Rotujúci fázor prúdu	$I\,e^{j\omega t}$	Komplexný vektor intenzity magn. poľa	$\boldsymbol{H}$
Odpor vedenia na jednotku dĺžky	R_0	-	0
Indukčnosť vedenia na jednotku dĺžky	L_0	permeabilita prostredia	μ
Vodivosť (zvod) vedenia na jednotku dĺžky	G_0	konduktivita (špecifická vodivosť) prostredia	$\varkappa$
Kapacita vedenia na jednotku dĺžky	C_0	permitivita (dielektrická konštanta) prostredia	ε

Na základe formálnej korešpondencie veličín homogénneho vedenia a rovinnej vlny môžeme pre rovinnú vlnu zaviesť aj ďalšie užitočné pojmy, známe z homogénneho vedenia v harmonickom ustálenom stave. Sú to

konštanta tlmenia β a **fázová konštanta** α

$$\gamma = \beta + j\alpha \qquad (m^{-1}) \qquad (5.16)$$

fázová rýchlosť v_f

$$v_f = \frac{\omega}{\alpha} \qquad (m.s^{-1}) \qquad (5.17)$$

vlnová dĺžka l

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \qquad (m)$$

(5.18)

Charakteristická impedancia (vlnová impedancia) prostredia

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\varkappa + j\omega\varepsilon}} = Z_0\, e^{j\varphi_Z} \qquad (\Omega) \qquad (5.19)$$

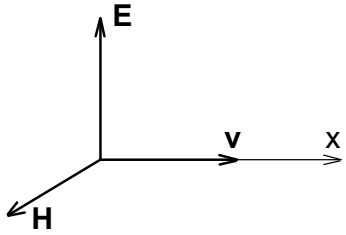
Pripomíname, že charakteristická impedancia Z_0 (podobne ako konštanta šírenia γ) je pre dané prostredie komplexná konštanta. Napriek rovnakému názvu, samozrejme, charakteristická impedancia pri rovinnej vlne nemá charakter impedancie ako pri elektrických obvodoch. Zhodnosť názvov je aj v tomto prípade len formálna.

Postup pri riešení rovníc (5.12) a (5.13) je z matematiky známy, vrátime sa k nemu na prednáškach. Tu uvedieme bez dôkazu priamo riešenie týchto rovníc pre prípad harmonickej rovinnej vlny, ktorá sa šíri v smere x. Riešenie je v tvare, ktoré poznáme z homogénneho vedenia - vo forme superpozície priamej a spätnej vlny. Riešenie pre komplexné vektory ***E*** a ***H*** môžeme napísať v tvare

$$\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{E}_0^+\, e^{-\gamma x} + \boldsymbol{E}_0^-\, e^{\gamma x} = \boldsymbol{E}_p(x,t) + \boldsymbol{E}_s(x,t) \qquad (5.20)$$

$$\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{H}(x,t) = \mathbf{u}_x \times \left(\frac{\boldsymbol{E}_0^+}{Z_O}\, e^{-\gamma x} - \frac{\boldsymbol{E}_0^-}{Z_O}\, e^{\gamma x} \right) = \boldsymbol{H}_0^+ e^{-\gamma x} - \boldsymbol{H}_0^-\, e^{\gamma x} = \boldsymbol{H}_p(x,t) + \boldsymbol{H}_s(x,t) \qquad (5.21)$$

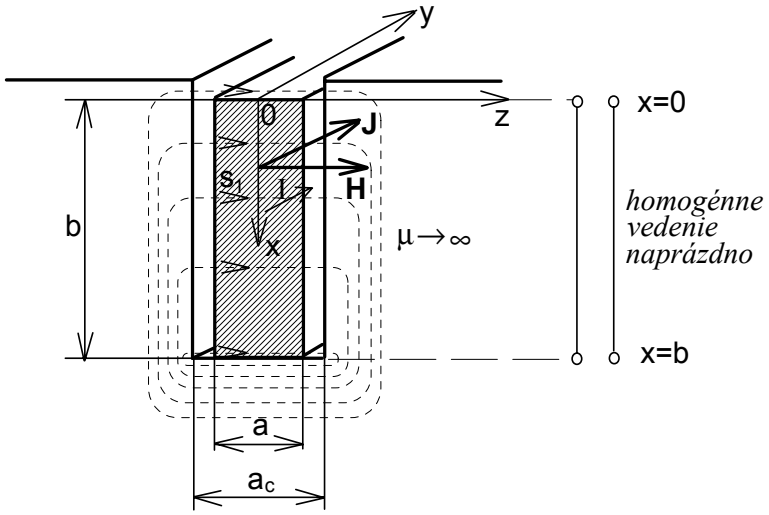
V týchto rovniciach sú $\boldsymbol{E}_0^+$, $\boldsymbol{E}_0^-$ integračné konštanty, ktoré majú charakter **komplexných vektorov** a pre konkrétny prípad sa určia sa z okrajových podmienok. Prvý člen riešenia zodpovedá priamej, druhý spätnej vlne. Aj keď to zo vzťahov (5.20), (5.21) priamo nevidno, možno dokázať, že vektory rovinnej vlny **E** a **H** majú len zložky kolmé na smer šírenia vlny, čiže ich zložky v smere x sú nulové. Vektorové násobenie jednotkovým vektorom $\mathbf{u}_x$ vo vzťahu (5.21) znamená, že vektor **H** je v priestore voči vektoru **E** natočený o 90°. Teda oba vektory sú navzájom kolmé a oba sú zároveň kolmé na smer šírenia vlny (obr. 5.1).



Obr. 5.1

5.3 Vodič v obdĺžnikového prierezu v drážke z feromagnetika

Zaoberajme sa teraz prípadom, ktorý je náplňou tohto cvičenia. Budeme analyzovať elektromagnetické pole v kovovom vodiči obdĺžnikového prierezu, napájanom harmonickým prúdom a uloženom vo feromagnetickej drážke (obr. 5.2). Ukážeme si, že EMP vo vodiči má charakter rovinnej vlny šíriacej sa v smere x.



Obr. 5.2

Pri riešení opäť predpokladáme, že feromagnetická drážka a vodič v nej uložený sú v smere osi y dostatočne dlhé, teda možno zanedbať okrajové účinky na koncoch drážky. V takom prípade veličiny elektromagnetického poľa nie sú funkciou súradnice y. Pretože podľa Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare (**J** = $\varkappa$ **E**) je intenzita elektrického poľa **E** úmerná prúdovej hustote **J**, preto sa EMP vo vodiči často charakterizuje vektormi **J** a **H**.

Feromagnetický materiál tvoriaci drážku má veľkú permeabilitu $\mu \gg \mu_0$ a môžeme ho preto v ďalšom považovať za ideálne feromagnetikum ($\mu \to \infty$). Pri tomto predpoklade je intenzita magnetického poľa H vo feromagnetiku zanedbateľná. Preto budeme v ďalšom predpokladať vo feromagnetiku H = 0. Magnetické indukčné čiary v drážke prechádzajú cez rozhranie z drážky do feromagnetika kolmo, v smere osi z (na obr. 5.2 sú kreslené bodkovane). Prúdová hustota vo vodiči a intenzita magnetického poľa v drážke v tomto prípade závisia len od súradnice x, jedná sa o **jednorozmerný prípad**.

Skôr ako budeme analyzovať prípad harmonického prúdu, ukážeme si, aké je rozloženie prúdovej hustoty a intenzity magnetického poľa vo vodiči, ak ním prechádza jednosmerný prúd.

5.3.1 Pole vo vodiči pri jednosmernom stacionárnom prúde

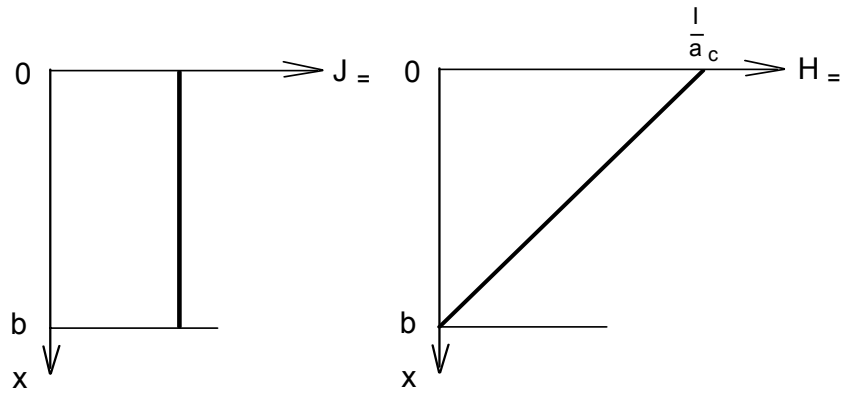
Pri jednosmernom prúde $I_=$ je prúdová hustota $J_=$ v priereze vodiča konštantná, nezávisí od súradnice x, $J(x)_=$ = konšt. Závislosť $H(x)_=$ určíme pomocou zákona prietoku ($\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r} = \sum I$) po (všeobecnej) indukčnej čiare s_1, ktorej vzdialenosť v drážke od povrchu vodiča je x, obr. 5.2.
S integračnou dráhou je viazaná len časť prúdu vodiča (prúd v časti vodiča pod indukčnou čiarou s_1). Túto časť prúdu označíme I´. Pretože vo feromagnetiku je H = 0, a vo vodiči majú vektory **H** a d**r** rovnaký smer, možno zákon prietoku písať v skalárnom tvare

$$H_=.a_c = I'$$

a po vyjadrení $I' = I_= \dfrac{(b-x)}{b}$ je intenzita magnetického poľa v hĺbke x

$$H_{=} = \frac{I_{=}}{b\,a_c}(b-x) \tag{5.22}$$

Je to rovnica priamky, pre x = 0 je $H_{=}(0) = \frac{I_{=}}{a_c}$, pre x = b je $H_{=}(b) = 0$. Na obr. 5.3. sú priebehy $J_{=}(x)$ a $H_{=}(x)$.



Obr. 5.3

5.3.2 Pole vo vodiči pri harmonickom prúde

Pri analýze vyjdeme z rovnice (5.21).Integračné konštanty $\boldsymbol{H}_0^+$, $\boldsymbol{H}_0^-$ určíme z okrajových podmienok pre intenzitu magnetického poľa na povrchu vodiča (x = 0) a pri dne drážky (x = b). Ak je fázor prúdu vo vodiči I (**modul fázora prúdu je efektívna hodnota prúdu**), aplikáciou zákona prietoku po indukčnej čiare tesne obopínajúcej vodič (v drážke v mieste x = 0) dostaneme

$$\boldsymbol{H}(0) = \frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{H}(0) = \frac{\mathrm{I}}{a_c} \tag{5.23}$$

pričom sme opäť uvážili, že intenzita magnetického poľa je vo feromagnetiku nulová, $\mathbf{u}_z$ je jednotkový vektor v smere osi z. Pri dne vodiča je, podobne ako pri jednosmernom prúde, intenzita magnetického poľa nulová, $\boldsymbol{H}(b) = 0$. Dostali sme tak dve podmienky

$$\text{pre } x = 0: \qquad \boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{H}_0^+ - \boldsymbol{H}_0^- = \frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z \tag{5.24}$$

$$\text{pre } x = b: \qquad \boldsymbol{H}(b) = \boldsymbol{H}_0^+ e^{-\gamma b} - \boldsymbol{H}_0^- e^{\gamma b} = 0 \tag{5.25}$$

Z rovníc (5.24), (5.25) vyjadríme hľadané integračné konštanty

$$\boldsymbol{H}_0^+ = \frac{e^{\gamma b}}{e^{\gamma b} - e^{-\gamma b}}\,\frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{H}_0^- = \frac{e^{-\gamma b}}{e^{\gamma b} - e^{-\gamma b}}\,\frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z \tag{5.27}$$

a po dosadení do (5.21) je komplexný vektor intenzity magnetického poľa

$$\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{H}(x,\,t) = \frac{e^{\gamma(b-x)} - e^{-\gamma(b-x)}}{e^{\gamma b} - e^{-\gamma b}}\,\frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z = \frac{\sinh\left[\gamma(b-x)\right]}{\sinh(\gamma b)}\cdot\frac{\mathrm{I}\,e^{j\omega t}}{a_c}\mathbf{u}_z \tag{5.28}$$

Z tohto vzťahu možno s využitím (5.23) po krátkej úprave vyjadriť fázor $H_z(x)$ pomocou fázora $H_z(0)$ v mieste x = 0

$$\boxed{\mathsf{H}_z(x) = \frac{\sinh[\gamma(b-x)]}{\sinh(\gamma b)}\mathsf{H}_z(0) = H_z(x)\, e^{j\varphi_H(x)}} \qquad (5.29)$$

Komplexný vektor $\boldsymbol{J}$ určíme pomocou prvej MR

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \qquad (5.30)$$

Pre $\frac{\partial}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial}{\partial z} = 0$ je

$$\boldsymbol{J} = \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x\times\boldsymbol{H} = \mathbf{u}_x\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial x}$$

a po dosadení z (5.28) a krátkej úprave dostaneme

$$\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{J}(x,\ t) = \mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_z\ \frac{\mathsf{I}\, e^{j\omega t}}{a_c}(-\gamma)\frac{\cosh[\gamma(b-x)]}{\sinh(\gamma b)} = \gamma\ \frac{\cosh[\gamma(b-x)]}{\sinh(\gamma b)}\ \frac{\mathsf{I}\, e^{j\omega t}}{a_c}\ \mathbf{u}_y \qquad (5.31)$$

Fázor prúdovej hustoty J(x) vyjadrený pomocou fázora prúdovej hustoty pri povrchu drážky J(0) je po krátkej úprave

$$\boxed{\mathsf{J}_y(x) = \varkappa\,\mathsf{E}_y(x) = \mathsf{J}_y(0)\frac{\cosh\gamma(b-x)}{\cosh\gamma\, b} = J_y(x)\, e^{j\,\varphi_J(x)}} \qquad (5.32)$$

Konštanta šírenia pre vodič je s uvážením $\varkappa >> \omega\varepsilon$

$$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{j\,\omega\,\mu_0\,\varkappa} = \sqrt{\omega\,\mu_0\,\varkappa}\ e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad (m^{-1}) \qquad (5.33)$$

Komplexné funkcie $J_y(x)$, $H_z(x)$ sú na obr. 2.2, priebehy amplitúd týchto fázorov na obr. 2.3.

Porovnaním výsledkov poľa v drážke s homogénnym vedením by sme zistili, že prípad rovinnej vlny, ktorá sa v hlbokej drážke šíri v smere x, je formálne podobný riešeniu pre **homogénne vedenie v stave naprázdno**. Je to dané ekvivalentnými okrajovými podmienkami - v drážke je na dne H = 0, čomu na vedení v stave naprázdno zodpovedá nulový prúd na konci vedenia $I_2 = 0$, ako je to naznačené na obr. 5.1. Preto sme na základe formálnej korešpondencie veličín poľa a homogénneho vedenia mohli získať vzťahy (5.29), (5.32) priamo z výsledkov pre fázory prúdu a napätia na homogénnom vedení pri harmonickom budení v stave naprázdno.

Z výsledkov riešenia vidno, že ak vodičom prechádza časovo premenlivý (v našom prípade harmonický prúd) dochádza k ”vytláčaniu” prúdu smerom k povrchu drážky, čiže prúdová hustota je pri dne drážky (x = b) menšia ako pri povrchu (x = 0). Tento jav sa nazýva **elektrickým povrchovým javom** (elektrickým skinefektom). V tomto prípade ide o tzv. jednostranný skinefekt - prúd je vytláčaný v jednom smere, smerom k povrchu drážky.

V prípade hlbokej drážky je spätná (odrazená) vlna zanedbateľná. Ako vyplýva z (5.21) pri priamej vlne je pomer fázorov intenzity elektrického poľa a intenzity magnetického poľa sa rovná charakteristickej impedancii Z_0. Pre vodič ($\varkappa >> \omega\varepsilon$) je fáza charakterictickej impedancie $\varphi_z = 0$, pozri (5.19). Preto v hlbokej drážke je pri zanedbaní spätnej vlny fázový posun medzi H(x) a J(x) približne $\pi/4$, pozri obr. 2.2.