MODELOVANIE POTENCIÁLOVÝCH POLÍ FYZIKÁLNYMI METÓDAMI

Rastislav Dosoudil, *Marcel Mičan*

Úlohy

1) Pre zadané usporiadania elektród zmerajte rozloženie elektrického potenciálu a nakreslite ekvipotenciálne čiary a vektory intenzity elektrického poľa.
2) Vo zvolených miestach (minimálne v troch) získanej mapy poľa vypočítajte analyticky hodnoty potenciálov a porovnajte ich s nameranými hodnotami.
3) Vypočítajte celkovú kapacitu vzduchového usporiadania medzi elektródami pre zvolený elektródový systém.
4) Nájdite miesto maximálneho namáhania a vypočítajte v ňom radiálnu zložku vektora intenzity $\boldsymbol{E}$.

Analýza úlohy

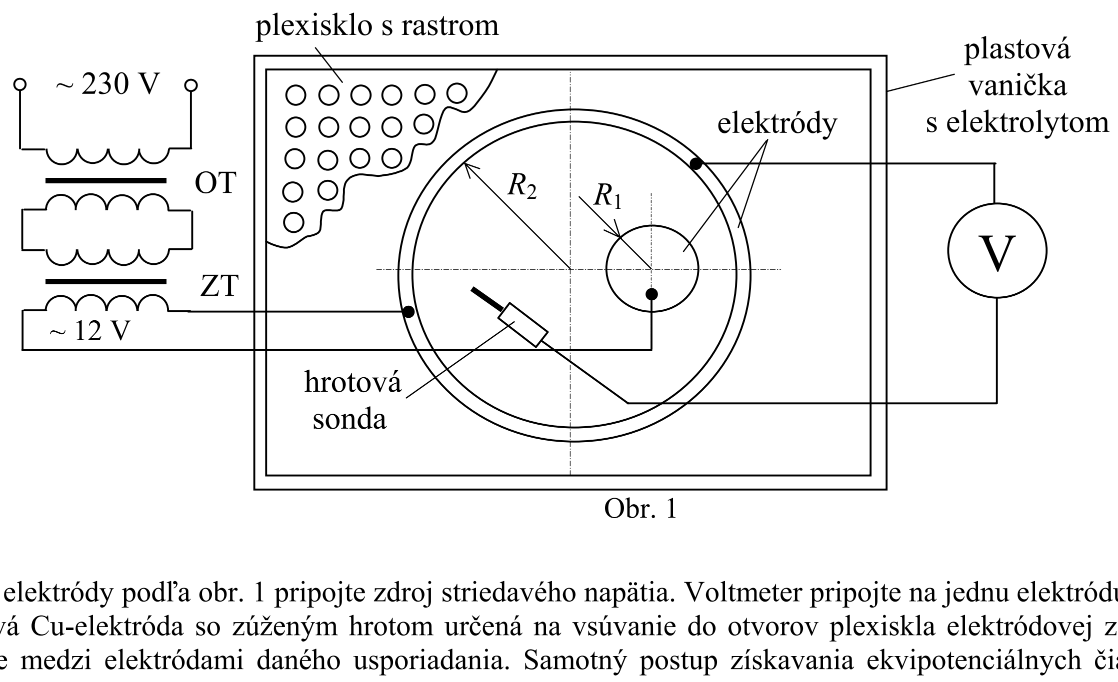
V elektrotechnickej praxi sa stretávame často s takým usporiadaním elektród, pri ktorých analytický výpočet poľa je veľmi obtiažny alebo v reálnych podmienkach nemožný. Na tomto cvičení sa budeme zaoberať len s rovinným poľom, ktoré sa v smere jednej súradnicovej osi (z) nemení. Aby sme získali obraz o rozložení poľa pri danom usporiadaní elektród, používame tzv. modelovanie polí. Je to vlastne vytvorenie modelu daného reálneho usporiadania tak, aby podľa možnosti čo najvernejšie vystihoval pôvodné usporiadanie. V elektrotechnike medzi najčastejšie používané metódy patria:
a) modelovanie na polovodivom papieri,
b) modelovanie v elektrolytickej vani,
c) sieťový model,
d) optické metódy (rozloženie železných pilín od permanentného magnetu).

Pri modelovaní na polovodivom papieri a v elektrolytickej vani sa využíva analógia medzi geometrickým tvarom prúdového poľa a modelovaného (elektrostatického, magnetického) poľa. Popis merania, výpočtu a spracovanie jednotlivých bodov zadania si ukážeme na prípade poľa koaxiálneho kábla s vysunutou vnútornou žilou. Postup merania ekvipotenciál u iných usporiadaní je podobný. Postup výpočtu a analytické alebo numerické vyjadrenie potenciálu jednotlivých polí je uvedený v literatúre [1], [2].

Postup pri meraní

Úloha 1

Z pripravených elektródových zostáv jednu vyberte, túto vložte do plastovej vaničky naplnenou vodou a na elektródy pripojte podľa obr. 1 vodiče zo zvonkového transformátora (výber usporiadania elektród zadá učiteľ).



Obr. 1

Na elektródy podľa obr. 1 pripojte zdroj striedavého napätia. Voltmeter pripojte na jednu elektródu a na hrotovú sondu (kovová Cu-elektróda so zúženým hrotom určená na vsúvanie do otvorov plexiskla elektródovej zostavy). Odmeriame napätie medzi elektródami daného usporiadania. Samotný postup získavania ekvipotenciálnych čiar môžeme na takto zostavenom pracovisku urobiť len tzv. nepriamou metódou.

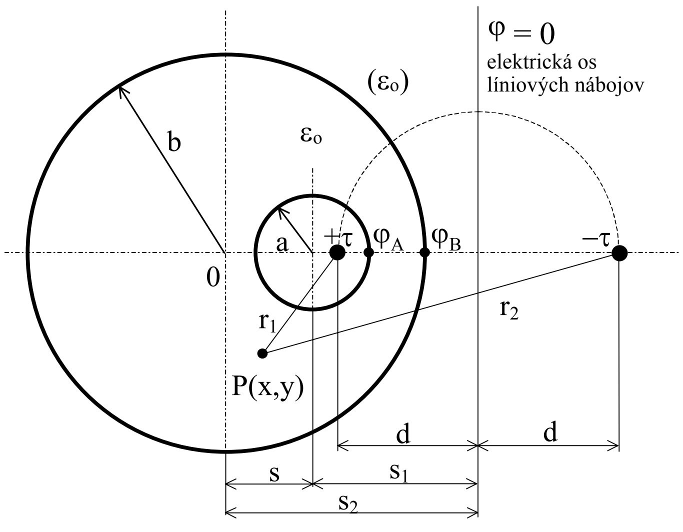
a) *Nepriama metóda* - hrotovou sondou odpichujeme napätia v uzloch rastra, ktorý nám vytvára plexisklo. Hodnoty potenciálov zapisujeme v našom prípade do programu EMP. Tento spôsob merania nám nedovoľuje priamo nájsť geometrické miesta ekvipotenciál. Ich miesto musíme určiť lineárnou interpoláciou medzi nameranými bodmi. Spojením takto vzniknutých bodov s rovnakým potenciálom dostávame ekvipotenciálne čiary. Zobrazenie ekvipotenciálnych čiar a vektorov intenzity elektrického poľa v bodoch rastra sa realizuje pomocou programu EMP. Získanie ekvipotenciálnych čiar nepriamou metódou má nevýhodu v tom, že používame rovnomerný raster nameraných bodov, pričom rozloženie ekvipotenciálnych čiar je spravidla nerovnomerné. Tento problém by sa dal vyriešiť výberom hustejšieho rastra nameraných bodov čo s ohľadom na rozmery sondy a času potrebného k realizácii tohoto laboratórneho cvičenia nie je možné. Presnejšie zobrazenie ekvipotenciálnych čiar je však možné dosiahnuť výberom vyššej interpolácie v programme EMP.

b) *Priama metóda* sa dá aplikovať v prípade, že namiesto elektród ponorených do elektrolytu by sme mali k dispozícii napustený mm-papier vodivým roztokom, na ktorý by sme dané elektródy voľne položili. Metóda potom spočíva v tom, že hrotovou sondou (v tomto prípade napr. versatilka s grafitovým hrotom) nájdeme miesto zvolenej hodnoty potenciálu (napr. 1 V). Sondou pohybujeme po mm-papieri tak, aby sme udržiavali zvolenú hodnotu napätia ekvipotenciálnej čiary. Pri pohybe sondy s grafitovým hrotom spájame geometrické miesta s rovnakou hodnotou napätia (čo je nič iné ako ekvipotenciálna čiara).

Úlohy 2 a 3

Úlohou je určiť potenciálové elektrické pole v oblasti vymedzenej dvoma kruhovými vyosenými dobre vodivými elektródami so zadanými okrajovými podmienkami vyznačenými na obr.2. Zadanú Dirichletovu okrajovú úlohu (poznáme veľkosti potenciálov na elektródach) budeme riešiť metódou zrkadlenia v kartézskych súradniciach. Potenciál v ľubovoľnom bode P(x,y) od dvoch nekonečne dlhých vodičov s líniovou hustotou náboja +τ a −τ je: $\varphi(x,y) = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o}\ln\sqrt{\dfrac{(s_2+d-x)^2+y^2}{(s_2-d-x)^2+y^2}}$, pričom pre jednotlivé vzdialenosti platí:

$$s_1 = \frac{b^2-a^2}{2s} - \frac{s}{2}, \qquad s_2 = \frac{b^2-a^2}{2s} + \frac{s}{2}, \qquad d = \sqrt{s_1^2-a^2} = \sqrt{s_2^2-b^2} \qquad (1,2,3)$$



Obr.2

Tieto vzťahy sa dostanú aplikáciou Euklidovej vety o odvesne na danú geometriu:

$(s_1+d)(s_1-d) = a^2 \quad \rightarrow \quad s_1^2 - d^2 = a^2$

$(s_2+d)(s_2-d) = b^2 \quad \rightarrow \quad s_2^2 - d^2 = b^2$

Po odčítaní oboch rovníc dostaneme $s_1^2 - s_2^2 = a^2 - b^2$, čo sa dá prepísať do tvaru: $(s_1+s_2)(s_1-s_2) = a^2 - b^2$. Z poslednej rovnice s uvážením vzťahu $s_2 - s_1 = s$ priamo vyplývajú vzťahy (1,2). Vzťah (3) dostaneme aplikáciou Pytagorovej vety na danú geometriu: $s_1^2 = a^2 + d^2$ a $s_2^2 = b^2 + d^2$. Výsledné napätie voči vonkajšej elektróde je potom:

$$U(x,y) = \frac{\varphi(x,y)-\varphi_B}{\varphi_A-\varphi_B} = U\frac{\ln\sqrt{\dfrac{(s_2+d-x)^2+y^2}{(s_2-d-x)^2+y^2}} - \ln\dfrac{d+(s_2-b)}{d-(s_2-b)}}{\ln\left\{\dfrac{(d+s_1-a)(d-s_2+b)}{(d-s_1+a)(d+s_2-b)}\right\}} = U\frac{ln\sqrt{\dfrac{(s_2+d-x)^2+y^2}{(s_2-d-x)^2+y^2}} - ln\dfrac{d+(s_2-b)}{d-(s_2-b)}}{ln\left\{\dfrac{(s_1+d)(s_2-d)}{a\cdot b}\right\}}$$

kde $\varphi_A = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{d+(s_1-a)}{d-(s_1-a)}$ a $\varphi_B = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{d+(s_2-b)}{d-(s_2-b)}$ (4,5)

Kapacita usporiadania je daná vzťahom:

$$C = \frac{Q^+}{U} = \frac{\tau \cdot l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_o l}{\ln\left\{\dfrac{(d+s_1-a)(d-s_2+b)}{(d-s_1+a)(d+s_2-b)}\right\}} = \frac{2\pi\varepsilon_o l}{\ln\left\{\dfrac{(s_1+d)(s_2-d)}{a\cdot b}\right\}} \qquad (6)$$

Keďže naše modely považujeme pri výpočtoch za nekonečne dlhé v smere osi z, budeme kapacitu počítať na jednotku dĺžky (l = 1 m).

Úloha 4

Normálovú zložku intenzity elektrického poľa v mieste maximálneho namáhania možno približne určiť z mapy poľa.

$$\boldsymbol{E}_r = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\boldsymbol{u}_x = -\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\Delta x}\cdot\boldsymbol{u}_x \qquad (7)$$

Príloha

Výpočet kapacity grafickou metódou:

Intenzita elektrického poľa je daná vzťahom $E = U_1\ /\ a$, kde U_1 je potenciálny rozdiel medzi dvoma ekvipotenciálami. Posuvný tok prechádzajúci silovou trubicou ohraničenou dvoma siločiarami vo vzdialenosti b je $\psi = b\,L\,D$, kde L je dĺžka daného usporiadania elektród (kolmo na dané usporiadanie elektród) a D je elektrická indukcia. Ak sme zakreslili n - siločiar smerujúcich od jednej elektródy k druhej, potom celkový posuvný tok medzi elektródami je daný vzťahom: $\psi_C = \varepsilon_0\ n\ L\ b\ U_1\ /\ a = Q$. Využitím Gaussovej vety môžeme napísať, že celkový posuvný tok je rovný náboju Q na jednom vodiči. Ak označíme počet ekvipotenciál medzi vodičmi m, potom môžeme určiť kapacitu daného usporiadania nasledovne:

$$C = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}} = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{nLb}\cdot\dfrac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{a}}}{(\mathrm{m}+1)\cdot\mathrm{U}_1} = \varepsilon_0\cdot\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}+1}\cdot\mathrm{L}\cdot\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \qquad (8)$$

Za predpokladu dodržaného pravidla d) je výraz b/a = 1 a výsledné napätie medzi elektródami: $U = (m+1)\cdot U_1$. Takto získané pole môžeme brať za správne len za predpokladu, že dĺžka elektród L je v porovnaní so vzdialenosťou elektród značná (potom môžeme okrajový efekt na konci daného usporiadania zanedbať a elektródy brať ako nekonečne dlhé). Pre dlhé vodiče sa spravidla udáva kapacita na jednotku dĺžky:

$$\frac{C}{L} = \varepsilon_0\cdot\frac{n}{m+1} \qquad \text{(F/m)} \qquad (9)$$

Literatúra.

[1] *Ľ. Šumichrast a kol.*: Teória elektromagnetického poľa. Zbierka riešených príkladov, (*skriptum KTEE*)
[2] *D. Mayer, J. Polák*: Metody řešení elektrických a magnetických polí, Praha, SNTL, (*kniha*)