

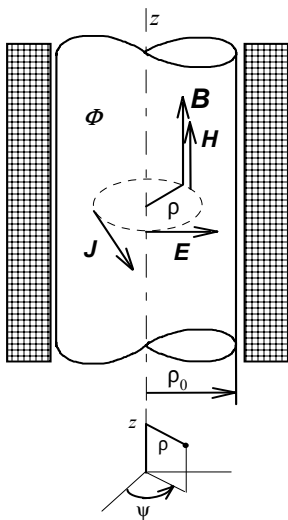
SKINEFEKT VO VODIVOM VALCI

(Juraj Kment, Pavol Krivošík)

Úlohy.

- 1) Odmerajte napätia indukované v cievkach umiestnených vo vnútri vodivého nemagnetického jadra pri dvoch zadaných frekvenciách.
- 2) Vypočítajte rozloženie intenzity elektrického poľa, prúdovej hustoty a magnetického toku v jadre pre obe frekvencie. Porovnajme teoretickú hodnotu intenzity elektrického poľa s nameranými hodnotami.
- 3) Z nameraných rozdielových napätí v jadre stanovte približné rozloženie magnetickej indukcie pre jednu za-danú frekvenciu.
- 4) Nakreslite vektorový diagram rozloženia napätia (magnetického toku) v jadre pre jednu zadanú frekvenciu.

Analýza úlohy.



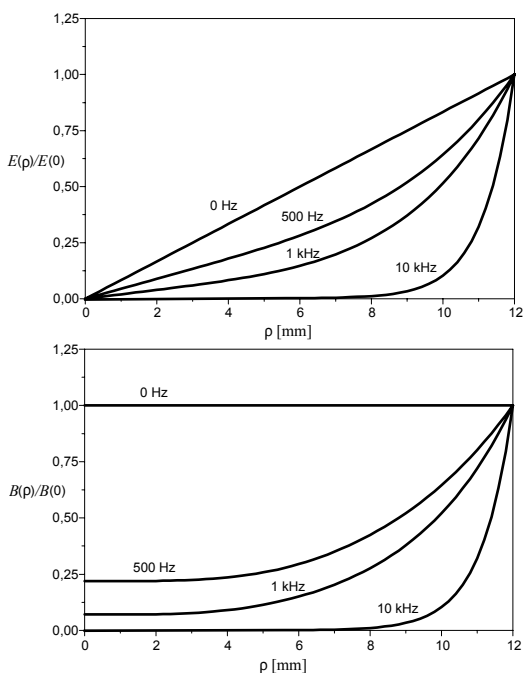
Uvažujme nekonečne dlhú valcovú cievku pretekanú harmonickým prúdom s vodivým nemagnetickým jadrom, charakterizovaným skalárnymi konštantami κ (merná vodivosť) a μ (permeabilita). Os cievky stotožníme s osou z cylindrickej súradnej sústavy (obr. 1). Prúd vytvára v okolí cievky magnetické pole. Toto pole je rotačne symetrické, nezávislé od súradníc z a ψ . Vektory intenzity magnetického poľa \mathbf{H} a magnetickej indukcie \mathbf{B} majú iba zložku v smere osi z : H_z , resp. B_z , siločiarly magnetického poľa v jadre sú priamky rovnobežné s osou z . Vektor intenzity elektrického poľa \mathbf{E} , súvisiaci so zmenou magnetického poľa, má iba zložku E_ψ , jeho siločiarly sú sústredné kružnice so stredom na osi z .

Vektoru \mathbf{E} zodpovedajú vírivé prúdy v jadre s prúdovou hustotou $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$. Tieto prúdy spôsobujú Joulove straty a súčasne vytvárajú vlastné magnetické pole, ktoré sa superponuje na pôvodné pole. Pri nízkych frekvenciách je veľkosť vektora \mathbf{E} na povrchu jadra malá a malé sú aj vírivé prúdy, takže magnetický tok v jadre je prakticky konštantný v celom priereze jadra. V tomto prípade amplitúda vektorov \mathbf{E} a \mathbf{J} narastá od stredu jadra k okraju lineárne.

Obr. 1

Pri vyšších frekvenciách sa indukujú hlavne na povrchu jadra vírivé prúdy. Ich

prúdnicie majú tvar koncentrických kružníc v rovinách kolmých na os valca. Siločiarly magnetického poľa sú vytláčané k okraju valca (obr. 2).



Obr. 2. Závislosť veľkosti vektora \mathbf{E} a \mathbf{B} ako funkcie vzdialenosti od stredu valca ρ pre rôzne frekvencie. $E(0)$, resp. $B(0)$ sú veľkosť vektora \mathbf{E} , resp. \mathbf{B} na povrchu valca, $\kappa = 3,53 \cdot 10^7$ S/m, $\mu = \mu_0$.

Pojem vysokej a nízkej frekvencie určuje parameter $\xi_0 = \rho_0 \sqrt{\omega \mu \kappa}$, kde ρ_0 je polomer valca. Pre $\xi_0 \ll 1$ je povrchový jav (skinefekt) nevýrazný.

V prípade harmonicky sa meniaceho elektromagnetického poľa riešenie pre veľkosť vektora \mathbf{E} (resp. \mathbf{J}) a \mathbf{H} (resp. \mathbf{B}) dostaneme riešením Maxwellových rovníc a z nich vyplývajúcich vlnových rovníc v komplexnom tvare. V prípade valca (cylindrická súradná sústava) vedie toto riešenie na Besselove diferenciálne rovnice. Potom pre komplexný vektor intenzity elektrického poľa \mathbf{E} dostaneme:

$$\mathbf{E}(\rho) = \mathbf{E}(0) \frac{J_1(\sqrt{-j}|\gamma|\rho)}{J_1(\sqrt{-j}|\gamma|\rho_0)} \quad (1)$$

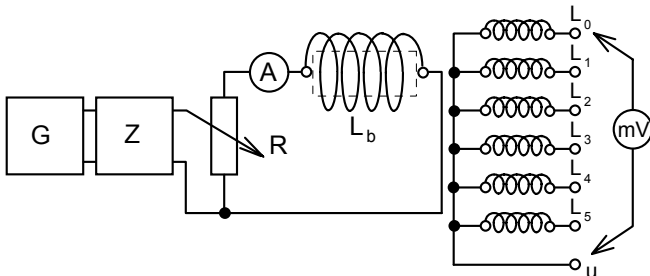
kde J_1 je Besselova funkcia prvého druhu prvého rádu, $|\gamma| = \sqrt{\omega \mu \kappa}$, $\mathbf{E}(0)$ je komplexný vektor intenzity elektrického poľa na povrchu valca.

Pre komplexný vektor magnetickej indukcie dostaneme Besselovu diferenciálnu rovnicu nultého rádu, ktorej riešenie má tvar:

$$\mathbf{B}(\rho) = \mathbf{B}(0) \frac{J_0(\sqrt{-j}|\gamma|\rho)}{J_0(\sqrt{-j}|\gamma|\rho_0)} \quad (2)$$

kde J_0 je Besselova funkcia prvého druhu nultého rádu.

Zapojenie.



Obr. 3

- G** generátor harmonického napätia s nastaviteľnou frekvenciou
Z zosilňovač
A ampérmeter
mV milivoltmeter
L_b budiaca cievka s hliníkovým jadrom
L₀ až L₅ meracie cievky uložené v jadre budiacej cievky (počet závitov každej cievky $N_m=60$)
 Polomery meracích cievok:
 L₀ 12 mm L₃ 9 mm
 L₁ 11 mm L₄ 8 mm
 L₂ 10 mm L₅ 7 mm
 Parametre hliníkového jadra: $\kappa = 3,53 \cdot 10^7$ S/m, $\mu = \mu_0$.

Jadro cievky sa skladá z piatich trubíc, ktoré sú zasunuté v sebe. Ich hrúbka steny je 1 mm. V strede každej trubice a vnútorného plného jadra je po obvode vysústružená plytká drážka, v ktorej je navinutá meracia cievka. Konce týchto cievok sú vyvedené úzkymi pozdĺžnymi drážkami na čelo jadra a ďalej na zdievky cievok L_0 až L_5 .

V každej cievke sa indukuje harmonické napätie s maximálnou hodnotou:

$$U_i = N_m E(\rho_i) 2\pi\rho_i \quad (3)$$

ktoré je viazané s magnetickým tokom Φ :

$$U_i = j\omega\Phi_i N_m = U_i e^{j\omega t} \quad (4)$$

Postup pri meraní.

Úloha 1.

Pre zadané frekvencie odmerajte napätia na meracích cievkach (U_0, U_1, \dots, U_5) voči spoločnému uzlu u a rozdielové napätia medzi cievkami ($U_{0,1}, U_{1,2}, \dots, U_{4,5}$) - efektívne hodnoty. Pre každú frekvenciu nastavte budiaci prúd pomocou generátora a odporu R tak, aby milivoltmeter, pripojený na vrchnú cievku (L_0), ukazoval rovnaké napätie (napr. 100 mV). Odmerané hodnoty zapíšte do tabuľky I a II.

Úloha 2.

Vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa na všetkých polomeroch ρ_i :

$$E_i = \frac{U_i \sqrt{2}}{2\pi\rho_i N_m} \quad (5)$$

Z odmeraných hodnôt vypočítajte pomer E_i/E_0 (pomer veľkosti intenzity elektrického poľa na polomere ρ_i k veľkosti intenzity elektrického poľa na povrchu jadra).

Teoretickú hodnotu pomeru E_i/E_0 určte z rovnice (1):

$$\frac{E_i}{E_0} = \frac{|J_1(\xi_i \sqrt{-j})|}{|J_1(\xi_0 \sqrt{-j})|} \quad (6)$$

kde:

$$\xi_i = \rho_i \sqrt{\omega\kappa\mu_0} \quad (7)$$

Zostrojte závislosť E_i/E_0 ako funkcie vzdialenosti od stredu jadra pre namerané a teoreticky vypočítané hodnoty (obr. 2).

Z odmeraných hodnôt E_i vypočítajte rozloženie veľkosti prúdovej hustoty:

$$J_i = \kappa E_i \quad (8)$$

a zo vzťahu (4) veľkosť magnetického toku i-tou cievkou (výsledky zapíšte do tabuľky III):

$$\Phi_i = \frac{U_i}{4,44 N_m f} \quad (9)$$

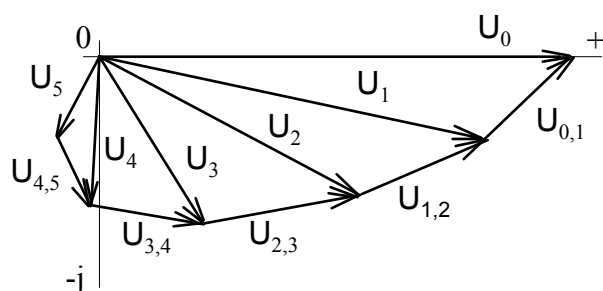
Úloha 3.

Veľkosť magnetickej indukcie v i-tej vrstve jadra vypočítajte zo vzťahu:

$$B_m = \frac{U_{i-1,i} \sqrt{2}}{\omega N_m (\rho_{i-1}^2 - \rho_i^2)} \quad (10)$$

kde $U_{i-1,i}$ sú odmerané rozdielové napätia. Výsledky zapíšte do tabuľky II.

Úloha 4.



Obr. 4

Pre zadanú frekvenciu zostrojte vektorový diagram z odmeraných napätí (obr.4). Diagram po pootočení o -90° a pri zmene mierky (4) zodpovedá rozloženiu magnetického toku v priereze jadra.

Spracovanie výsledkov.

Tabuľka I

merané napätie	zdiery	U_i [mV]	
		$f_1 = \dots$ [kHz]	$f_2 = \dots$ [kHz]
U_0	$u - 0$		
U_1	$u - 1$		

Tabuľka II

zdiery	$U_{i-1,i}$ [mV]	B_i [T]
0-1		
1-2		

Tabuľka III

cievka	ρ_i [mm]	U_i [mV]	exper. E_i/E_0	ξ_i	$ J_1(\xi_i \sqrt{-j}) $	teoret. E_i/E_0	J_i [A/mm ²]	Φ_i [Wb]
L ₀	12							
L ₁	11							

Besselove funkcie prvého druhu nultého rádu $J_0(\xi\sqrt{-j})$.

ξ	$ J_0(\xi\sqrt{-j}) $	$\varphi [^\circ]$	ξ	$ J_0(\xi\sqrt{-j}) $	### $[^\circ]$	ξ	$ J_0(\xi\sqrt{-j}) $	$\varphi [^\circ]$	ξ	$ J_0(\xi\sqrt{-j}) $	### $[^\circ]$
0.05	1.00000	0.036	2.55	1.54751	76.874	5.05	6.42236	-179.033	7.55	30.58430	-77.357
0.10	1.00000	0.143	2.60	1.58554	79.090	5.10	6.61974	-176.998	7.60	31.57826	-75.326
0.15	1.00001	0.322	2.65	1.62518	81.298	5.15	6.82349	-174.964	7.65	32.60526	-73.295
0.20	1.00003	0.573	2.70	1.66646	83.498	5.20	7.03384	-172.929	7.70	33.66641	-71.264
0.25	1.00006	0.895	2.75	1.70941	85.690	5.25	7.25100	-170.895	7.75	34.76285	-69.233
0.30	1.00013	1.289	2.80	1.75406	87.873	5.30	7.47521	-168.860	7.80	35.89579	-67.202
0.35	1.00023	1.755	2.85	1.80043	90.047	5.35	7.70669	-166.825	7.85	37.06644	-65.171
0.40	1.00040	2.291	2.90	1.84855	92.213	5.40	7.94570	-164.791	7.90	38.27608	-63.141
0.45	1.00064	2.900	2.95	1.89846	94.370	5.45	8.19248	-162.756	7.95	39.52602	-61.110
0.50	1.00098	3.579	3.00	1.95019	96.518	5.50	8.44729	-160.721	8.00	40.81762	-59.080
0.55	1.00143	4.330	3.05	2.00378	98.658	5.55	8.71040	-158.687	8.05	42.15227	-57.049
0.60	1.00202	5.152	3.10	2.05925	100.791	5.60	8.98208	-156.652	8.10	43.53144	-55.019
0.65	1.00279	6.044	3.15	2.11666	102.915	5.65	9.26263	-154.617	8.15	44.95663	-52.989
0.70	1.00375	7.007	3.20	2.17604	105.032	5.70	9.55234	-152.582	8.20	46.42938	-50.958
0.75	1.00493	8.040	3.25	2.23743	107.142	5.75	9.85152	-150.548	8.25	47.95130	-48.928
0.80	1.00638	9.141	3.30	2.30089	109.245	5.80	10.16047	-148.513	8.30	49.52405	-46.898
0.85	1.00813	10.312	3.35	2.36647	111.342	5.85	10.47954	-146.479	8.35	51.14935	-44.868
0.90	1.01021	11.550	3.40	2.43421	113.433	5.90	10.80904	-144.444	8.40	52.82897	-42.838
0.95	1.01266	12.855	3.45	2.50417	115.519	5.95	11.14934	-142.409	8.45	54.56474	-40.808
1.00	1.01552	14.226	3.50	2.57641	117.599	6.00	11.50079	-140.375	8.50	56.35857	-38.778
1.05	1.01884	15.662	3.55	2.65099	119.674	6.05	11.86377	-138.341	8.55	58.21242	-36.748
1.10	1.02266	17.160	3.60	2.72798	121.745	6.10	12.23866	-136.306	8.60	60.12831	-34.718
1.15	1.02703	18.720	3.65	2.80743	123.812	6.15	12.62585	-134.272	8.65	62.10834	-32.689
1.20	1.03198	20.340	3.70	2.88943	125.875	6.20	13.02576	-132.238	8.70	64.15469	-30.659
1.25	1.03756	22.017	3.75	2.97404	127.935	6.25	13.43881	-130.204	8.75	66.26959	-28.629
1.30	1.04383	23.750	3.80	3.06134	129.991	6.30	13.86543	-128.170	8.80	68.45537	-26.600
1.35	1.05083	25.537	3.85	3.15141	132.045	6.35	14.30610	-126.136	8.85	70.71443	-24.570
1.40	1.05861	27.373	3.90	3.24434	134.096	6.40	14.76126	-124.102	8.90	73.04924	-22.541
1.45	1.06721	29.258	3.95	3.34021	136.144	6.45	15.23140	-122.069	8.95	75.46238	-20.511
1.50	1.07668	31.188	4.00	3.43912	138.191	6.50	15.71703	-120.035	9.00	77.95649	-18.482
1.55	1.08708	33.160	4.05	3.54115	140.236	6.55	16.21867	-118.002	9.05	80.53432	-16.453
1.60	1.09843	35.172	4.10	3.64641	142.279	6.60	16.73684	-115.969	9.10	83.19870	-14.423
1.65	1.11079	37.219	4.15	3.75500	144.321	6.65	17.27209	-113.935	9.15	85.95258	-12.394
1.70	1.12421	39.299	4.20	3.86703	146.361	6.70	17.82501	-111.902	9.20	88.79899	-10.365
1.75	1.13872	41.409	4.25	3.98261	148.401	6.75	18.39618	-109.869	9.25	91.74106	-8.336
1.80	1.15436	43.545	4.30	4.10185	150.439	6.80	18.98621	-107.837	9.30	94.78203	-6.307
1.85	1.17117	45.704	4.35	4.22487	152.477	6.85	19.59573	-105.804	9.35	97.92527	-4.277
1.90	1.18919	47.883	4.40	4.35179	154.514	6.90	20.22539	-103.771	9.40	101.1742	-2.248
1.95	1.20846	50.080	4.45	4.48275	156.550	6.95	20.87587	-101.739	9.45	104.5325	-0.219
2.00	1.22901	52.290	4.50	4.61788	158.586	7.00	21.54786	-99.706	9.50	108.0039	1.810
2.05	1.25086	54.512	4.55	4.75731	160.621	7.05	22.24209	-97.674	9.55	111.5921	3.839
2.10	1.27405	56.743	4.60	4.90119	162.657	7.10	22.95930	-95.642	9.60	115.3011	5.867
2.15	1.29862	58.980	4.65	5.04966	164.692	7.15	23.70026	-93.610	9.65	119.1351	7.896
2.20	1.32458	61.221	4.70	5.20288	166.726	7.20	24.46576	-91.578	9.70	123.0984	9.925
2.25	1.35196	63.464	4.75	5.36101	168.761	7.25	25.25663	-89.546	9.75	127.1952	11.954
2.30	1.38079	65.708	4.80	5.52421	170.795	7.30	26.07372	-87.514	9.80	131.4301	13.983
2.35	1.41109	67.949	4.85	5.69265	172.830	7.35	26.91790	-85.483	9.85	135.8079	16.012
2.40	1.44289	70.188	4.90	5.86649	174.864	7.40	27.79010	-83.451	9.90	140.3333	18.040
2.45	1.47621	72.422	4.95	6.04594	176.899	7.45	28.69125	-81.420	9.95	145.0115	20.069
2.50	1.51108	74.651	5.00	6.23116	178.933	7.50	29.62231	-79.388	10.00	149.8476	22.098

Besselove funkcie prvého druhu prvého rádu $J_1(\xi\sqrt{-j})$.

ξ	$ J_1(\xi\sqrt{-j}) $	### [°]	ξ	$ J_1(\xi\sqrt{-j}) $	### [°]	ξ	$ J_1(\xi\sqrt{-j}) $	### [°]	ξ	$ J_1(\xi\sqrt{-j}) $	### [°]
0.05	0.025000	-44.98210	2.55	1.411222	0.03339	5.05	5.991228	95.54196	7.55	29.200616	-164.40189
0.10	0.050000	-44.92838	2.60	1.449780	1.70124	5.10	6.179388	97.53356	7.60	30.158515	-162.39228
0.15	0.075000	-44.83886	2.65	1.489367	3.38961	5.15	6.373736	99.52560	7.65	31.148423	-160.38242
0.20	0.100000	-44.71352	2.70	1.530036	5.09768	5.20	6.574474	101.51807	7.70	32.171421	-158.37233
0.25	0.125001	-44.55238	2.75	1.571841	6.82461	5.25	6.781812	103.51095	7.75	33.228626	-156.36201
0.30	0.150003	-44.35543	2.80	1.614838	8.56958	5.30	6.995964	105.50424	7.80	34.321197	-154.35146
0.35	0.175007	-44.12267	2.85	1.659085	10.33174	5.35	7.217156	107.49793	7.85	35.450327	-152.34070
0.40	0.200013	-43.85411	2.90	1.704638	12.11027	5.40	7.445618	109.49203	7.90	36.617254	-150.32972
0.45	0.225024	-43.54975	2.95	1.751559	13.90436	5.45	7.681590	111.48652	7.95	37.823257	-148.31853
0.50	0.250041	-43.20960	3.00	1.799908	15.71317	5.50	7.925319	113.48141	8.00	39.069658	-146.30713
0.55	0.275066	-42.83368	3.05	1.849746	17.53593	5.55	8.177062	115.47669	8.05	40.357823	-144.29554
0.60	0.300101	-42.42198	3.10	1.901139	19.37183	5.60	8.437083	117.47237	8.10	41.689167	-142.28375
0.65	0.325151	-41.97454	3.15	1.954149	21.22012	5.65	8.705656	119.46845	8.15	43.065152	-140.27177
0.70	0.350219	-41.49136	3.20	2.008844	23.08003	5.70	8.983064	121.46493	8.20	44.487290	-138.25961
0.75	0.375309	-40.97250	3.25	2.065291	24.95086	5.75	9.269600	123.46180	8.25	45.957143	-136.24726
0.80	0.400427	-40.41797	3.30	2.123559	26.83188	5.80	9.565568	125.45907	8.30	47.476330	-134.23473
0.85	0.425578	-39.82782	3.35	2.183718	28.72241	5.85	9.871280	127.45675	8.35	49.046520	-132.22203
0.90	0.450768	-39.20210	3.40	2.245840	30.62181	5.90	10.187061	129.45482	8.40	50.669444	-130.20916
0.95	0.476007	-38.54088	3.45	2.309999	32.52943	5.95	10.513246	131.45329	8.45	52.346890	-128.19612
1.00	0.501301	-37.84423	3.50	2.376269	34.44468	6.00	10.850182	133.45217	8.50	54.080706	-126.18291
1.05	0.526660	-37.11223	3.55	2.444728	36.36699	6.05	11.198228	135.45144	8.55	55.872803	-124.16955
1.10	0.552095	-36.34498	3.60	2.515453	38.29581	6.10	11.557753	137.45111	8.60	57.725161	-122.15603
1.15	0.577615	-35.54260	3.65	2.588525	40.23062	6.15	11.929142	139.45118	8.65	59.639823	-120.14236
1.20	0.603235	-34.70522	3.70	2.664026	42.17094	6.20	12.312791	141.45164	8.70	61.618904	-118.12853
1.25	0.628966	-33.83298	3.75	2.742040	44.11630	6.25	12.709110	143.45250	8.75	63.664591	-116.11456
1.30	0.654824	-32.92605	3.80	2.822653	46.06628	6.30	13.118523	145.45375	8.80	65.779146	-114.10044
1.35	0.680824	-31.98461	3.85	2.905953	48.02047	6.35	13.541470	147.45539	8.85	67.964908	-112.08619
1.40	0.706982	-31.00886	3.90	2.992031	49.97850	6.40	13.978402	149.45741	8.90	70.224295	-110.07179
1.45	0.733318	-29.99905	3.95	3.080981	51.94002	6.45	14.429789	151.45981	8.95	72.559809	-108.05726
1.50	0.759849	-28.95542	4.00	3.172896	53.90471	6.50	14.896117	153.46259	9.00	74.974039	-106.04259
1.55	0.786598	-27.87825	4.05	3.267877	55.87226	6.55	15.377885	155.46574	9.05	77.469658	-104.02779
1.60	0.813585	-26.76784	4.10	3.366022	57.84242	6.60	15.875614	157.46925	9.10	80.049435	-102.01286
1.65	0.840834	-25.62453	4.15	3.467437	59.81491	6.65	16.389838	159.47313	9.15	82.716231	-99.99781
1.70	0.868370	-24.44866	4.20	3.572227	61.78953	6.70	16.921112	161.47737	9.20	85.473006	-97.98263
1.75	0.896218	-23.24063	4.25	3.680503	63.76605	6.75	17.470009	163.48195	9.25	88.322822	-95.96733
1.80	0.924407	-22.00085	4.30	3.792378	65.74429	6.80	18.037122	165.48688	9.30	91.268844	-93.95191
1.85	0.952966	-20.72977	4.35	3.907968	67.72408	6.85	18.623063	167.49215	9.35	94.314347	-91.93637
1.90	0.981924	-19.42787	4.40	4.027393	69.70526	6.90	19.228467	169.49776	9.40	97.462717	-89.92071
1.95	1.011313	-18.09564	4.45	4.150779	71.68770	6.95	19.853987	171.50369	9.45	100.717460	-87.90494
2.00	1.041167	-16.73362	4.50	4.278251	73.67127	7.00	20.500302	173.50994	9.50	104.082190	-85.88906
2.05	1.071521	-15.34238	4.55	4.409943	75.65586	7.05	21.168112	175.51651	9.55	107.560660	-83.87307
2.10	1.102410	-13.92251	4.60	4.545991	77.64139	7.10	21.858141	177.52339	9.60	111.156740	-81.85698
2.15	1.133873	-12.47464	4.65	4.686534	79.62776	7.15	22.571138	179.53057	9.65	114.874450	-79.84077
2.20	1.165949	-10.99941	4.70	4.831719	81.61489	7.20	23.307877	-178.46196	9.70	118.717920	-77.82446
2.25	1.198678	-9.49750	4.75	4.981696	83.60273	7.25	24.069158	-176.45420	9.75	122.691450	-75.80805
2.30	1.232102	-7.96962	4.80	5.136619	85.59122	7.30	24.855810	-174.44615	9.80	126.799460	-73.79154
2.35	1.266264	-6.41648	4.85	5.296648	87.58031	7.35	25.668688	-172.43783	9.85	131.046550	-71.77492
2.40	1.301211	-4.83883	4.90	5.461950	89.56996	7.40	26.508676	-170.42924	9.90	135.437460	-69.75821

2.45	1.336987	-3.23745	4.95	5.632695	91.56014	7.45	27.376691	-168.42038	9.95	139.977100	-67.74140
2.50	1.373641	-1.61311	5.00	5.809060	93.55081	7.50	28.273678	-166.41126	10.00	144.670530	-65.72450