

Dvojbrany

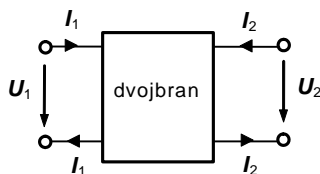
Úlohy

1. Zostavte pasívny dvojbran tak, že predložené rezistory zapojíte do tvaru T-článku (obr.2). Zo známych hodnôt odporu jednotlivých rezistorov vypočítajte hodnoty prvkov impedančnej a admitančnej matice dvojbranu. Vypočítané hodnoty prvkov matice dvojbranu overte meraním na dvojbrane.
2. Zostavte pasívny dvojbran tak, že zapojíte predložené rezistory do tvaru π -článku. Zo známych hodnôt odporu jednotlivých rezistorov vypočítajte hodnoty prvkov impedančnej a admitančnej matice dvojbranu. Vypočítané hodnoty prvkov matice dvojbranu overte meraním na dvojbrane.

Úvod

Pri analýze (tiež syntéze) elektrických obvodov sa často z dôvodov zjednodušenia riešenia snažíme časť zložitého obvodu alebo aj viaceré jeho časti nahradiť **viacpólovými prvkami** tak, aby pôvodný zložitý obvod tvorilo spojenie niekoľkých viacpólových prvkov (n-pólov). Vnútorne usporiadanie jednotlivých viacpólových prvkov môže byť ľubovoľne zložitá, pričom každý takýto viacpólový prvok (n-pól) môžeme z hľadiska jeho vnútornej stavby analyzovať samostatne. Vonkajšie vlastnosti n-pólu potom môžeme definovať pomocou vzťahov medzi príslušným počtom vstupných veličín daného n-pólu. Riešenie celého zložitejšieho obvodu je takto zjednodušené na riešenie vzájomných vzťahov medzi n-pólmi resp. medzi ich vstupnými veličinami.

Viacpól s počtom pólov $2n$, pri ktorom sú združené vždy dvojice pólov tak, aby prúdy jednotlivých združených dvojíc pólov (brán) boli rovnaké, nazývame n-bran (angl. n-port). Základným typom n-branu je **dvojbran** ($2n = 4$) podľa obr.1. Vlastnosti dvojbranu môžeme nezávisle na jeho vnútornej stavbe popísať vzťahmi medzi dvoma vonkajšími (vstupnými) napätiami a prúdmi dvojbranu. Dvojbran môže byť zostavený vo všeobecnosti z aktívnych aj pasívnych, lineárnych aj nelineárnych obvodových prvkov. V tejto úlohe sa budeme zaoberať **pasívnymi lineárnymi dvojbranmi**, zostavenými pospájaním lineárnych rezistorov. Treba pripomenúť, že vyšetrowanie vlastností pasívnych dvojbranov je základnou úlohou, nakoľko aktívny dvojbran môžeme nahradiť pasívnym dvojbranom a dvojicou nezávislých zdrojov (metóda vyňatia zdrojov).



Obr.1. Označenie vstupných veličín dvojbranu

Charakteristiky dvojbranu

Dvojbran je možno úplne opísať dvoma rovnicami, ktoré obsahujú vonkajšie napätia a prúdy, a to niekoľkými spôsobmi. Základným a často používaným opisom vlastností dvojbranu je vyjadrenie pomocou **impedančných alebo admitančných parametrov** dvojbranu (tzv. maticové charakteristiky). Vyjadrenie maticových charakteristík pomocou komplexných veličín ako sú impedancia resp. admitancia predpokladá použitie dvojbranu **v obvodoch s ustálenými harmonickými napätiami a prúdmi**, pričom stavebnými prvkami dvojbranu môžu byť vo všeobecnosti pasívne prvky R, L, C .

Ak zavedieme označenie fázorov vstupných veličín dvojbranu U_1, I_1, U_2, I_2 v súlade s označením podľa obr.1, môžeme napísať rovnice pre fázory napätí v závislosti od prúdov

v tvare:

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

alebo maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

kde koeficienty $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ vystupujúce v rovniciach (1) majú rozmer impedancie (Ω), preto ich nazývame impedančné parametre dvojbranu a ich maticu impedančnou maticou dvojbranu.

Podobne možno vyjadriť fázory prúdov v závislosti od napätí

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

kde koeficienty Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} majú rozmer admitancie [S], preto ich nazývame admitančné parametre dvojbranu a ich maticu admitančnou maticou dvojbranu.

Fyzikálny význam parametrov dvojbranu

Ak je na 1. bránu dvojbranu pripojené napätie U_1 , pričom prúd 2. brány $I_2 = 0$ (rozpojený obvod), bude pre parametre podľa rovníc (1) platiť:

$$\frac{U_1}{I_1} = Z_{11}, \quad \frac{U_2}{I_1} = Z_{21}.$$

Ak je na dvojbran pripojené napätie U_2 , pričom $I_1 = 0$ platí:

$$\frac{U_1}{I_2} = Z_{12}, \quad \frac{U_2}{I_2} = Z_{22}.$$

Ak pri pripojenom napätí U_1 je napätie dvojbranu $U_2 = 0$, čo docielime tak, že svorky 2. brány prepojíme bezodporovou spojkou, potom podľa rovníc (2) vyplýva:

$$\frac{I_1}{U_1} = Y_{11}, \quad \frac{I_2}{U_1} = Y_{21}.$$

Ak pri pripojenom napätí U_2 je napätie dvojbranu $U_1 = 0$ (stav nakrátko na 1. bráne), potom platí:

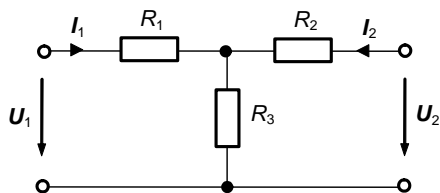
$$\frac{I_1}{U_2} = Y_{12}, \quad \frac{I_2}{U_2} = Y_{22}.$$

Ako vidieť z uvedených rovníc, jednotlivé parametre dvojbranu možno stanoviť z podielu fázorov príslušných veličín v príslušnom tzv. prevádzkovom stave dvojbranu (stav naprázdno alebo stav nakrátko). To teda vyžaduje meranie fázorov, teda veľkostí a fáz jednotlivých napätí, resp. prúdov, čo nie je bežne rozšírené meranie.

Keďže v prípade rezistívnych dvojbranov sú maticové parametre reálne čísla, môžeme takéto parametre určiť pri použití stacionárneho zdroja na základe merania jednosmerných napätí a prúdov.

Dvojbrany zložené z rezistorov

V tejto časti stanovíme **impedančnú a admitančnú maticu** konkrétneho dvojbranu zostaveného z jednotlivých prvkov, ktorými budú rezistory. Všetky prvky impedančnej a admitančnej matice takéhoto dvojbranu budú reálne čísla.



Obr.2. Rezistorový T-článok

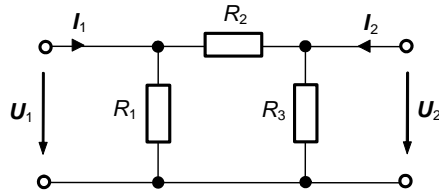
Prvky matice dvojbranu podľa obr.2 dostaneme napr. riešením aplikáciou slučkovej metódy:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot (I_1 + I_2) & \text{Po úprave:} & \quad U_1 = (R_1 + R_3) \cdot I_1 + R_3 \cdot I_2 \\ U_2 &= R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot (I_1 + I_2) & & \quad U_2 = R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2 \end{aligned}$$

Impedančná matica T-článku:

Admitančná matica T-článku (inverzná k impedančnej):

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} & -\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ -\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} & \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{bmatrix}$$



Obr.3. Rezistorový π -článok

Ak pri zapojení obvodu dvojbranu podľa obr.3 aplikujeme na riešenie prúdov uzlovú metódu, dostaneme rovnice:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U_1 + \frac{1}{R_2} \cdot (U_1 - U_2)$$

Po úprave:
$$I_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_1 - \frac{1}{R_2} \cdot U_2$$

$$I_2 = \frac{1}{R_3} \cdot U_2 + \frac{1}{R_2} \cdot (U_2 - U_1)$$

$$I_2 = -\frac{1}{R_2} \cdot U_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot U_2$$

Admitančná matica π -článku:

Impedančná matica (inverzná k admitančnej):

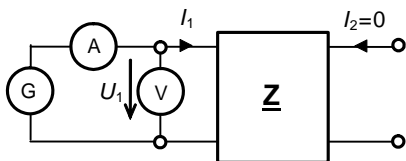
$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}$$

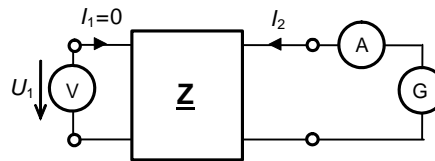
Určenie prvkov matice meraním

Prvky impedančnej matice dvojbranu (T , π), zostavenej z rezistorov môžeme určiť meraním v jednotlivých zapojeniach podľa obr.4. Merania vykonáme pripojením dvojbranu k jednosmernému stabilizovanému zdroju napätia G . Prúd a napätie odmeriame prístrojmi na meranie jednosmerných (stacionárnych) veličín. Pri meraní napätia použijeme číslicový voltmeter, ktorého vstupný odpor je dostatočne veľký, takže vlastnou spotrebou neovplyvní hodnotu prúdu, meranú ampérmetrom. Namerané hodnoty prvkov porovnáme s hodnotami získanými na základe teoretického rozboru výpočtom.

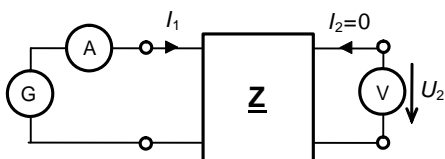
1. Zapojenie na meranie \mathbf{Z}_{11}



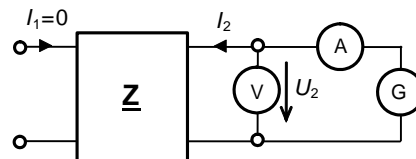
2. Zapojenie na meranie \mathbf{Z}_{12}



3. Zapojenie na meranie \mathbf{Z}_{21}



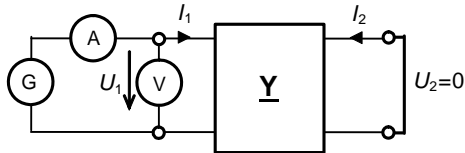
4. Zapojenie na meranie \mathbf{Z}_{22}



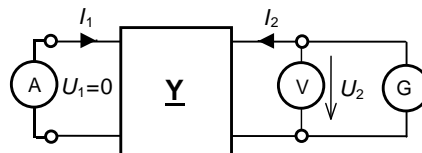
Obr.4. Meranie parametrov rezistívneho dvojbranu

Prvky admitančnej matice dvojbranu (T, π), odmeriame v zapojeniach podľa obr.5. Pri meraní niektorých prvkov dvojbranu podľa uvedeného spôsobu, je chyba merania závislá od veľkosti vnútorného odporu ampérmetra, resp. od jeho pomeru k hodnote odporu prvkov dvojbranu. Chybu vieme ovplyvniť voľbou ampérmetra a voľbou rezistorov dvojbranu. Z hľadiska zníženia chyby merania je vhodné, aby hodnoty odporov jednotlivých prvkov dvojbranu boli aspoň o dva rády väčšie ako vnútorný odpor ampérmetra.

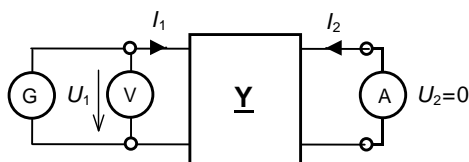
1. Zapojenie na meranie Y_{11}



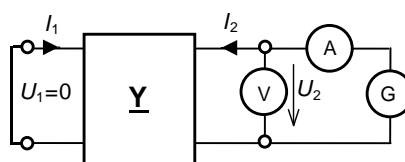
2. Zapojenie na meranie Y_{12}



3. Zapojenie na meranie Y_{21}



4. Zapojenie na meranie Y_{22}



Obr.5. Meranie admitančných parametrov dvojbranu

Vyhodnotenie meraní

Vyhodnotenie parametrov dvojbranu tvaru rezistorového T-článku

parametre matice	$Z_{11} [\Omega]$	$Z_{12} [\Omega]$	$Z_{21} [\Omega]$	$Z_{22} [\Omega]$
vypočítané hodnoty				
namerané hodnoty				

parametre matice	$Y_{11} [S]$	$Y_{12} [S]$	$Y_{21} [S]$	$Y_{22} [S]$
vypočítané hodnoty				
namerané hodnoty				

Vzťahy, použité pri výpočtoch:

Vyhodnotenie parametrov dvojbranu tvaru rezistorového π -článku

parametre matice	$Z_{11} [\Omega]$	$Z_{12} [\Omega]$	$Z_{21} [\Omega]$	$Z_{22} [\Omega]$
vypočítané hodnoty				
namerané hodnoty				

parametre matice	$Y_{11} [S]$	$Y_{12} [S]$	$Y_{21} [S]$	$Y_{22} [S]$
vypočítané hodnoty				
namerané hodnoty				

Vzťahy, použité pri výpočtoch: