

## Fázorové diagramy striedavých obvodov

### Úvod

Ak v lineárnom elektrickom obvode, pôsobia len zdroje s harmonickými zmenami napätí a prúdov rovnakej frekvencie, hovoríme, že obvod je v harmonickom ustálenom stave. Na riešenie prúdov a napätí lineárneho obvodu v harmonickom ustálenom stave je najvhodnejšie použitie metódy, ktorá využíva vyjadrenie harmonických veličín v komplexnom tvare. Dôvody ako aj podmienky použitia tejto komplexnej metódy sú uvedené v prednáškach resp. v príslušnej literatúre.

K riešeniu tejto úlohy zopakujeme fakty potrebné pri počítaní komplexnou metódou s dôrazom na grafickú interpretáciu komplexných veličín.

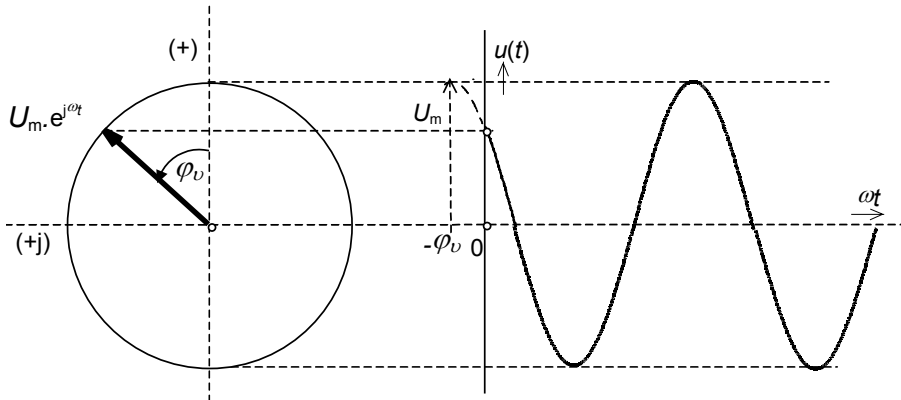
Obvodové veličiny napätie  $u(t)$  a prúd  $i(t)$ , ktoré sú funkciami času, odlišujeme od stacionárnych veličín  $U$  a  $I$  používanými symbolmi (malé písmená). Z praktických dôvodov niekedy závislosť od času nezdôrazňujeme a namiesto  $u(t)$  píšeme len  $u$ . Ľubovoľné napätie alebo prúd s harmonicky sa meniacim časovým priebehom môžeme zapísať v tvare

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u), \quad i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Zavedením komplexných veličín, tzv. fázorov, pričom pre napätie je fázor definovaný ako  $\mathbf{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi_u}$  a podobne pre prúd je fázor  $\mathbf{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi_i}$ , môžeme pôvodné funkcie času  $u(t)$  a  $i(t)$  vyjadriť ako reálnu časť súčinu fázora a operátora  $e^{j\omega t}$ . Pre súčin fázora a operátora  $e^{j\omega t}$  sa používa tiež názov rotujúci fázor. Potom platí:

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{U}_m \cdot e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{U}_m \cdot e^{j\omega t} + \mathbf{U}_m^* \cdot e^{-j\omega t}], \text{ resp. } i(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_m \cdot e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{I}_m \cdot e^{j\omega t} + \mathbf{I}_m^* \cdot e^{-j\omega t}]$$

Fázory môžeme v zásade zakresľovať ako vektory do komplexnej roviny. Grafická interpretácia fázora resp. rotujúceho fázora a jeho reálnej časti, rozvinutej na časovú os, ktorou je časová funkcia, je na nasledujúcom obrázku. Treba zdôrazniť, že komplexné veličiny píšeme z dôvodu odlišenia od reálnych veličín zásadne jednotným odlišným písmom, v tomto texte hrubším písmom (bold).



Ak zavedieme komplexné vyjadrenie harmonických napätí a prúdov do Kirchhoffových zákonov, dostaneme sa k aplikácii fázorov pri počítaní obvodov. Pre prúdy podľa 1.KZ bude

$$\sum_{\nu=1}^n i_{\nu}(t) = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_{\nu m} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^n \mathbf{I}_{\nu m} \cdot e^{j\omega t}\right\} = 0 \quad \text{čo je splnené, len ak platí} \quad \sum_{\nu=1}^n \mathbf{I}_{\nu m} = 0.$$

Podobne pre napätia podľa 2.KZ platí

$$\sum_{\mu=1}^m u_{\mu}(t) = \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re}\{\mathbf{U}_{\mu m} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{\mu=1}^m \mathbf{U}_{\mu m} \cdot e^{j\omega t}\right\} = 0 \quad \text{čo je splnené, len ak platí} \quad \sum_{\mu=1}^m \mathbf{U}_{\mu m} = 0.$$

Dôležité sú vzťahy medzi napätiami a prúdmi na ideálnych prvkoch  $R$ ,  $L$  a  $C$  pri počítaní s fázormi.

Napätie na rezistore:  $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{U}_{Rm} \cdot e^{j\omega t}\} = R \cdot \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_{Rm} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{R \cdot \mathbf{I}_{Rm} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{čo je splnené len ak platí} \quad \mathbf{U}_{Rm} = R \cdot \mathbf{I}_{Rm}.$$

Napätie na induktore:  $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$

$$\operatorname{Re}\{U_{Lm} \cdot e^{j\omega t}\} = L \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{I_{Lm} \cdot e^{j\omega t}\} = L \cdot \operatorname{Re}\{j\omega \cdot I_{Lm} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{čo je splnené, len ak platí} \quad U_{Lm} = j\omega L \cdot I_{Lm}.$$

Prúd cez kapacitor: 
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\operatorname{Re}\{I_{Cm} \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{U_{Cm} \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \operatorname{Re}\{j\omega \cdot U_{Cm} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{čo je splnené, len ak platí} \quad I_{Cm} = j\omega C \cdot U_{Cm}.$$

V prípade ustálených stavov sú splnené aj inverzné vzťahy (pozri prednášky)

$$I_{Rm} = \frac{U_{Rm}}{R}, \quad I_{Lm} = \frac{U_{Lm}}{j\omega L} \quad \text{a} \quad U_{Cm} = \frac{I_{Cm}}{j\omega C}$$

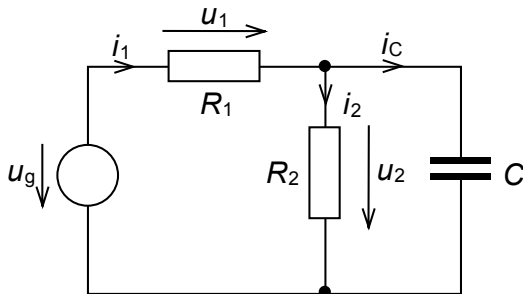
Grafické zobrazovanie fázorov v komplexnej rovine dáva možnosť, podobne ako vo fyzike sčítavať vektory, sčítavať fázory a tak graficky zobrazit' komplexné rovnice zodpovedajúce 1. a 2. Kirchhoffovmu zákonu. Takto graficky znázornené rovnice predstavujú tzv. fázorové diagramy. Fázorové diagramy sú praktickou a názornou pomôckou, ktorá často uľahčuje riešenie jednoduchších striedavých obvodov.

Výhodou je možnosť zakreslenia orientačného (t.j. kvalitatívne správneho) fázorového diagramu bez znalosti skutočných hodnôt jednotlivých veličín, využijúc vzťahy medzi napätiami a prúdmi na ideálnych prvkoch obvodu. Samotný presný fázorový diagram môžeme zostrojiť z nameraných hodnôt alebo, samozrejme, aj po vyriešení obvodu z vypočítaných hodnôt obvodových veličín.

### Úlohy:

Je daný obvod podľa obrázku, ktorý je v harmonickom ustálenom stave.

1. Nakreslite orientačný (kvalitatívny) fázorový diagram napätí a diagram prúdov obvodu.
2. Pre zadané parametre prvkov obvodu a napätie generátora odmerajte všetky napätia v obvode.
3. Z nameraných napätí v obvode zostrojíte príslušný fázorový diagram napätí a doplňte ho hodnotami prúdov vypočítanými z elementárnymi vzťahov vyhovujúcich pre prvky v obvode.
4. Hodnoty napätí a prúdov obvodu overte výpočtom pre zadané parametre a napätie zdroja rovnaké ako v bode 2.



Harmonický zdroj napätia:

$$u_g = U_{gm} \cdot \cos \omega t$$

s amplitúdou  $U_{gm}$  a frekvenciou  $f$ , pričom

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Pasívne prvky obvodu:

$$R_1, R_2, C.$$

### Postup:

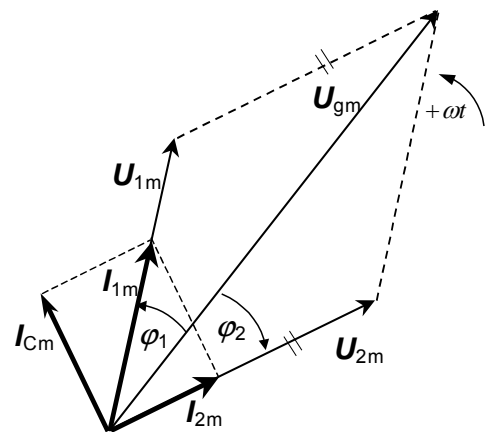
1. Orientačný fázorový diagram zostrojíme podľa nasledujúcich fázorových rovníc:

$$U_{gm} = U_{1m} + U_{2m} \quad \text{a} \quad I_{1m} = I_{2m} + I_{Cm}$$

Súčasne treba rešpektovať vzťahy medzi napätiami a prúdmi na jednotlivých ideálnych prvkoch:

$$U_{1m} = R_1 \cdot I_{1m}, \quad U_{2m} = R_2 \cdot I_{2m}, \quad U_{2m} = -j \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot I_{Cm}.$$

Pri konštruovaní orientačného fázorového diagramu (na obr. vpravo) začíname od zakreslenia napätia  $U_2$  (na paralelnom spojení), pokračujeme odhadom a zakreslením prúdu  $I_2$  (rovnaká fáza ako fáza napätia  $U_2$ ) a prúdu  $I_C$  (fáza  $-\pi/2$  voči fáze  $U_2$ ). Grafický súčet prúdov je prúd  $I_1$ , čím získame fázu napätia  $U_1$  a teda vieme skonštruovať fázorovú rovnicu napätí obvodu.



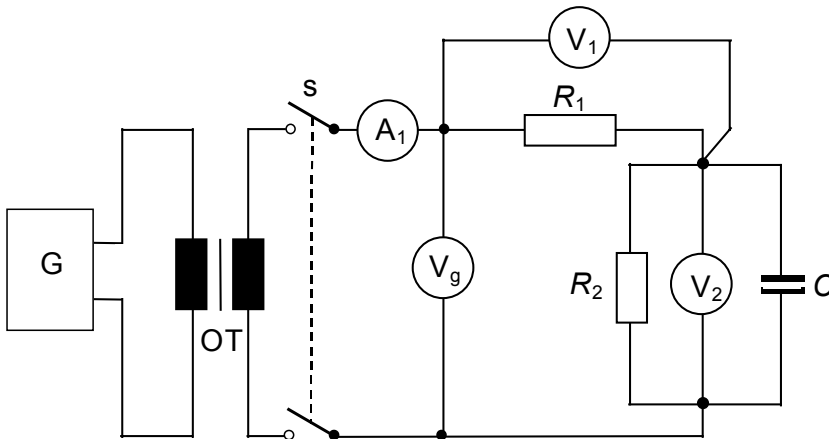
Orientačný fázorový diagram

**2.- 3.** Zostrojenie fázorového diagramu z nameraných hodnôt je experimentálnym potvrdením komplexnej metódy riešenia elektrických obvodov. Fázorový diagram obvodu môžeme zostrojiť na základe merania napätí resp. prúdov vo vyšetrovanom obvode. Meranie robíme bežnými meracími prístrojmi pre meranie napätia a prúdu. Takéto prístroje spravidla udávajú efektívnu hodnotu napätia resp. prúdu, pričom nemerajú ich fázu. Ak používame pri vyjadrení fázorov maximálne hodnoty (amplitúdy) veličín, potom je potrebné rešpektovať vzťah medzi maximálnou a efektívnou hodnotou, ktorý je

$$U_m = \sqrt{2} \cdot U,$$

kde  $U$  je efektívna hodnota, získaná odmeraním harmonického napätia  $u(t)$ . Samotné fázy jednotlivých napätí môžeme získať na základe jednoduchých goniometrických vzťahov.

Meracie zapojenie:



Použité prístroje:

**G** – zdroj napätia frekvencie  $f=50$  Hz

**OT** – oddeľovací transformátor

**s** – spínač

**A<sub>1</sub>** – merací prístroj prúdu

**V<sub>x</sub>** – meracie prístroje napätia

rezistory:

$R_1 = 58,5 \Omega$ ,  $R_2 = 119 \Omega$ ,

kapacitor:

$C = 35,9 \mu\text{F}$

Meranie a spracovanie výsledkov úloh 2.- 3.:

Po zapnutí spínača  $s$  odmeriame napätia  $U_g$ ,  $U_1$  a  $U_2$  a prúd  $I_1$ . Z odmeraných hodnôt napätí zakreslíme trojuholník, ktorý odpovedá napäťovej rovnici  $U_{gm} = U_{1m} + U_{2m}$ . Napätia zobrazíme graficky pri zvolenej mierke  $m_U$  (V/mm) do diagramu. Z dôvodov presnosti merania je vhodné odmerať všetky tri potrebné napätia jedným meracím prístrojom, pričom meranie treba vykonať v čo najkratšom časovom intervale. Prúdy  $I_2$  a  $I_C$  vypočítame zo známych parametrov prvkov  $R_2$  a  $C$  a v mierke prúdov  $m_i$  (A/mm) vynesieme v zmysle rovníc z predchádzajúceho úvodu do toho istého diagramu. Grafický súčet prúdov  $I_2$  a  $I_C$  porovnáme s odmeraným prúdom  $I_1$ .

Fázy z fázorového diagramu môžeme vypočítať zo vzťahov:

$$\cos \varphi_2 = \frac{U_2^2 + U_g^2 - U_1^2}{2 \cdot U_2 \cdot U_g}, \text{ resp. } \cos \varphi_1 = \frac{U_1^2 + U_g^2 - U_2^2}{2 \cdot U_1 \cdot U_g}$$

a porovnať s odmeranými uhlami v diagrame.

**4.** Nakoniec vykonáme výpočet prúdov v obvode ľubovoľnou metódou. V danom prípade tzv. sérioparalelného obvodu je výhodné počítať napríklad z nasledujúcich ľahko zapamätateľných vzťahov:

$$I_{2m} = \frac{U_{gm} \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} + R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}, \quad I_{Cm} = \frac{U_{gm} \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} + R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{a} \quad I_{1m} = I_{2m} + I_{Cm},$$

pričom napätia spočítame:

$$U_{1m} = R_1 \cdot I_{1m} \quad \text{a} \quad U_{2m} = R_2 \cdot I_{2m}.$$

Z takto získaných hodnôt zostrojený fázorový diagram porovnáme s nameraným diagramom.