

## Obvod s neharmonickými priebehmi

### Všeobecne

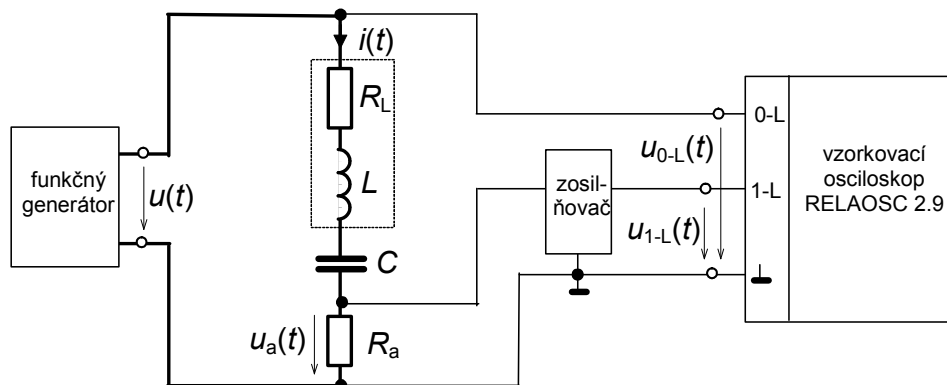
V tejto laboratórnej úlohe budeme analyticky a experimentálne analyzovať pomery v lineárnom elektrickom obvode v periodickom neharmonickom ustálenom stave.

Vyšetrovať budeme sériový RLC obvod, pripojený na zdroj periodického neharmonického napätia. Meraním určíme prvých päť harmonických (zložiek) napájacieho napätia a prvých päť harmonických (zložiek) prúdu v obvode (úlohy 1 až 3). Výsledky získané meraním porovnáme s výsledkami analytického výpočtu (úlohy 4 až 7).

### Úloha

1. V obvode podľa obr.1 zvolíte na funkčnom generátore predpísaný tvar neharmonického periodického napätia  $u(t)$ . Nastavíte zvolenú frekvenciu  $f$  a maximálnu hodnotu  $U_m$  napätia  $u(t)$ .
2. Zdroj napätia  $u(t)$  pripojíte na sériový RLC obvod a vzorkovacím osciloskopom zaznamenajte jeho časový priebeh. Využitím numerickej analýzy, ktorá je k dispozícii na meracom zariadení, určíte amplitúdy a fázy (argumenty) prvých piatich harmonických meraného napätia.
3. Vzorkovacím osciloskopom zaznamenajte časový priebeh prúdu  $i(t)$  a rovnakým postupom ako v bode 2 určíte amplitúdy prvých piatich harmonických prúdu v obvode.
4. Napätie  $u(t)$  vyjadrite analyticky a výpočtom koeficientov Fourierovho radu určíte amplitúdy a fázy (argumenty) prvých piatich harmonických analyticky vyjadreného napätia  $u(t)$ . Napätie  $u(t)$  vyjadrite pomocou Fourierovho radu (pre  $n = 1$  až 5).
5. Vypočítajte efektívnu hodnotu napätia z definičného vzťahu a pomocou prvých piatich harmonických určených výpočtom, resp. meraním a výsledky navzájom porovnajete.
6. Využitím komplexnej metódy vypočítajte amplitúdu a fázu prvých piatich harmonických prúdu  $i(t)$  v obvode. Veľkosti harmonických prúdu porovnajete s výsledkami merania podľa bodu 3.

### Schéma a opis zapojenia



Obr. 1. Schéma zapojenia meracej aparatury

Napätie funkčného generátora zvoleného časového priebehu  $u(t)$  je pripojené do obvodu so sériovým spojením prvkov s týmito parametrami:

cievka	$L = 0,318 \text{ H}$ a $R_L = 18,3 \Omega$ ,
kondenzátor	$C$ (odporúčaná hodnota kapacity 220 nF až 1 $\mu\text{F}$ ),
odpor	$R_a = 1020 \Omega$ .

Napätie  $u(t)$  je privedené na vstup 0-L vzorkovacieho osciloskopu [ $u_{0-L}(t) = u(t)$ ]. Napätie  $u_a(t)$ , úmerné prúdu v obvode  $i(t)$ , sa pred vstupom do vzorkovacieho osciloskopu (vstup 1-L) podľa potreby zosilní zosilňovačom s napäťovým ziskom s voliteľnými hodnotami  $A = 1, 2, 5$  alebo 10.

Pre okamihovú hodnotu prúdu  $i(t)$  platí

$$i(t) = \frac{u_a(t)}{R_a} = \frac{u_{1-L}(t)}{A \cdot R_a} \quad (1)$$

## Postup pri meraní a výpočte

1. Uvedieme do prevádzky generátor a nastavíme predpísaný tvar napätia (na generátore sú k dispozícii časové priebehy „obdĺžnikového“ alebo „trojuholníkového“ tvaru, ktoré sú súmerné podľa osi  $t$ ) a frekvenciu základnej harmonickej (odporúčaný rozsah 110 až 170 Hz). Uvedieme do prevádzky osobný počítač a ďalej budeme postupovať podľa ponuky počítačového programu na ovládanie vzorkovacieho osciloskopu. V režime „Options“ zvolíme „Channel“ a pre napätie  $u(t)$  vstup „0-L“. Následnou voľbou „Run“ sa na obrazovke zobrazí aktuálny priebeh vstupného napätia  $u(t)$ . Na generátore nastavíme vhodnú hodnotu amplitúdy napätia (približne do 2 V), pričom veľkosť napätia sledujeme a kontrolujeme na obrazovke. Odčítanie priebehu napätia  $u(t)$  vykonáme stlačením klávesu „Ctrl-Break“. Konštanty osciloskopu je možné nastaviť podľa ponuky, pričom údaj časovej miery platí až po nastavení dvoch kurzorov definujúcich periódu  $T$ . Nastavenie začiatku a konca periódy robíme v režime „Cursors“ („1st cursor“, resp. „2nd cursor“) posúvaním kurzoru a potvrdením klávesom „Esc“.

2. Po vymedzení periódy  $T$  dvoma kurzormi napätie  $u(t)$  analyzujeme pomocou vzorkovacieho osciloskopu tak, že využijeme ponuku programu, ktorý je založený na výpočte pomocou diskretnej Fourierovej transformácie. V režime „Fourier“ program „vyberie“ z časového priebehu napätia potrebný počet vzoriek ( $u_k$ ). Program zo vzoriek vypočíta aproximatívne koeficienty Fourierovho radu, ktoré sú dané vzťahom

$$U_n^A = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}$$

kde  $n$  je príslušná harmonická,  $u_k$  je  $k$ -ta vzorka priebehu,  $N$  je počet vzoriek na dĺžke periódy  $T$ .

V režime „Fourier“ odčítame postupne pre jednotlivé harmonické ( $n = 0$  až 5) ich amplitúdu („Modul“) a fázu („Phase“). Číslo harmonickej, ktorá sa má zobrazit' na obrazovke pritom meníme pohybom kurzoru v režime „Cursor“. Amplitúdy a fázy meraných harmonických napätia zapíšeme do tabuľky 1.

3. Rovnakým postupom ako v bode 2 pri použití vstupe „1-L“ odčítame na osciloskope amplitúdu prvých piatich harmonických napätia  $u_a(t)$ , ktoré je úmerné prúdu. Amplitúdy harmonických prúdu určíme pomocou vzťahu (1) a zapíšeme ich do tabuľky 2.

*Poznámka: Pri meraní prúdu odčítame len amplitúdy harmonických. Použitý vzorkovací osciloskop totiž vždy „vyberá“ vzorky počnúc prechodom daného priebehu nulou. Vo vyšetrovanom obvode napájacie napätie, resp. prúd majú nielen rozdielne časové priebehy, ale aj ich nulová hodnota je v rôznych časoch. Preto fázy harmonických zložiek prúdu určené meraním nezodpovedajú výsledkom teoretického výpočtu.*

4. Neharmonický priebeh napätia  $u(t)$  vyjadríme analyticky a vypočítame koeficienty Fourierovho radu (pozri poznámku na konci textu). Vypočítané veľkosti a fázy koeficientov  $U_n = U_n \cdot e^{j\varphi_{un}}$  priebehu  $u(t)$  pre  $n = 1$  až 5 zapíšeme do tabuľky 1. Napätie  $u(t)$  vyjadríme pomocou Fourierovho radu (pre  $n = 1$  až 5).
5. Efektívna hodnota  $U_{ef}$  periodického napätia  $u(t)$  je definovaná vzťahom

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u^2(t) dt} \quad (2)$$

Z aproximovaného priebehu možno efektívnu hodnotu vypočítať pomocou harmonických zložiek

$$U_{ef} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} \quad (3)$$

Vypočítame efektívnu hodnotu napätia  $U_{ef}$  z definičného vzťahu (2) a tiež pomocou prvých piatich harmonických určených z merania  $U_{ef \text{ mer}}$ , resp. výpočtu  $U_{ef \text{ vyp}}$  zo vzťahu (3). Hodnoty porovnáme.

6. Vypočítame fázory harmonických prúdu  $I_n$  pre  $n = 1$  až 5 použitím komplexného vyjadrenia, pričom platí

$$I_n = \frac{U_n}{Z_n} = I_n \cdot e^{j\varphi_{in}}$$

kde komplexná impedancia obvodu pre  $n$ -tú harmonickú je

$$Z_n = R_L + R_a + j \cdot n\omega L + \frac{1}{j \cdot n\omega C}$$

Jednosmerná zložka priebehu súmerného podľa osi  $t$  je  $I_0 = 0$ . Vypočítané veľkosti  $I_n$  a počiatočné fázy  $\varphi_{in}$  prvých piatich harmonických prúdu zapíšeme do tabuľky 2.

Tabuľka 1. Porovnanie výsledkov analýzy napätia  $u(t)$

Harmonická č.	Hodnoty určené z merania		Hodnoty určené výpočtom	
	$U_{n \text{ mer}} \text{ (V)}$	$\varphi_{un \text{ mer}} \text{ (}^\circ\text{)}$	$U_{n \text{ vyp}} \text{ (V)}$	$\varphi_{un \text{ vyp}} \text{ (}^\circ\text{)}$
0		–		–
1				
2				
3				
4				
5				

Tabuľka 2. Porovnanie výsledkov analýzy prúdu  $i(t)$

Harmonická č.	Hodnoty z merania	Hodnoty určené výpočtom	
	$I_{n \text{ mer}} \text{ (A)}$	$I_{n \text{ vyp}} \text{ (A)}$	$\varphi_{in \text{ vyp}} \text{ (}^\circ\text{)}$
0			–
1			
2			
3			
4			
5			

**Poznámka**

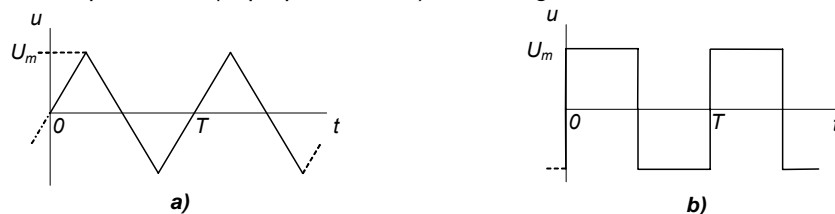
Periodické napätie, resp. prúd vyjadrené pomocou Fourierovho radu v komplexnom tvare sú

$$u(t) = U_0 + \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}_n \cdot e^{jn\omega t} \right] = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega t + \varphi_{un}) \quad i(t) = I_0 + \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_n \cdot e^{jn\omega t} \right] = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + \varphi_{in})$$

kde koeficienty Fourierovho radu  $U_0$ ,  $\mathbf{U}_n$  (a analogicky  $I_0$ ,  $\mathbf{I}_n$ ) sa vypočítajú z výrazov

$$U_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot dt \quad \mathbf{U}_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot e^{-jn\omega t} \cdot dt \quad \mathbf{U}_n = U_n \cdot e^{j\varphi_{un}}$$

Pre určité súmerné priebehy nie je vždy nevyhnutné integrovať v rozsahu celej periódy. V prípade, ak je funkcia  $u(t)$  nepárna a súmerná podľa osi  $t$  (napr. podľa obr. 2) stačí integrovať v rozsahu 0 až  $T/4$ .



Obr. 2. Príklady nepárnych priebehov súmerných podľa osi  $u$  a  $t$

Fourierov rad takýchto symetrických funkcií obsahuje len nepárne harmonické  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$  a platí

$$U_0 = 0$$

$$\mathbf{U}_n = -j \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin n\omega t \, dt = -j \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \quad \text{kde } \alpha = \omega t \text{ je tzv. časový uhol v radiánoch}$$

Napr. trojuholníkový periodický priebeh podľa obr. 2a možno vyjadriť v tvare

$$u(t) = \frac{8 \cdot U_m}{\pi^2} \cdot \left[ \sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2} \sin(7\omega t) + \dots \right]$$

a obdĺžnikový priebeh podľa obr. 2b v tvare

$$u(t) = \frac{4 \cdot U_m}{\pi} \cdot \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right]$$