Frekvenčná charakteristika lineárnej sústavy

Všeobecne

V lineárnych elektrických obvodoch v harmonickom ustálenom stave možno vyjadriť vzťah medzi dvoma ľubovoľnými obvodovými veličinami. Ak určujeme takýto vzťah v závislosti od zmeny určitého parametra, napr. od frekvencie, impedancie a pod., pri použití komplexnej metódy získame závislosť vo forme komplexnej funkcie (napríklad fázorov $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{I}$) komplexnej premennej (napr. $\boldsymbol{Z}$) alebo reálnej premennej (napr. ω). Funkcia komplexnej premennej sa graficky znázorňuje v komplexnej rovine fázorovými čiarami s funkcionálnou stupnicou, tzv. hodografmi.

Často sa využívajú charakteristiky, pri ktorých je premennou frekvencia, čiže frekvenčné charakteristiky. Nevýhodou pri ich grafickom znázornení v komplexnej rovine je, že určitému rozsahu frekvencie zodpovedá len krátky úsek takejto charakteristiky (hodografu), navyše na príslušnej charakteristike je nerovnomerná stupnica pre frekvenciu. Preto sa častejšie používajú samostatné amplitúdové charakteristiky a fázové charakteristiky, ktoré sa kreslia v kartézskej súradnicovej sústave, pričom pre frekvenciu sa výhodne používa logaritmická stupnica.

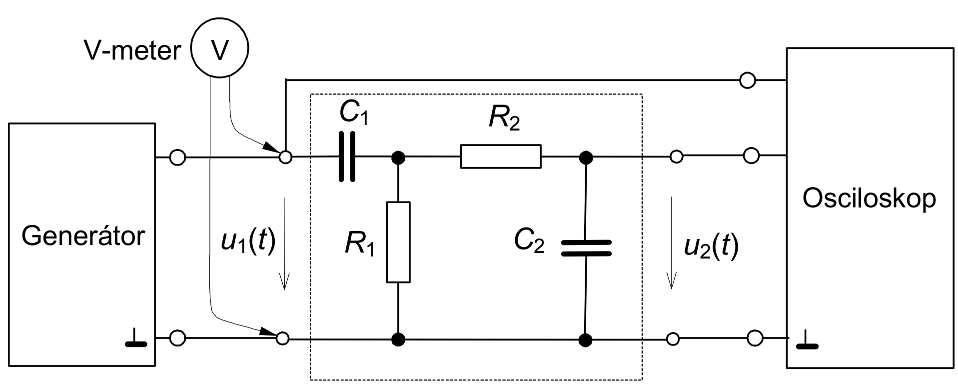
Ak ide o frekvenčné charakteristiky podielu dvoch napätí (obvykle podiel výstupného napätia k vstupnému napätiu), hovoríme o napäťovom prenose obvodu.

V tejto úlohe v zadanom lineárnom obvode určíme výpočtom a overíme meraním frekvenčnú amplitúdovú charakteristiku podielu veľkosti výstupného napätia $u_2(t)$ a veľkosti vstupného napätia $u_1(t)$, t. j. určíme napäťový prenos $U_2/U_1 = f(\omega)$.

Úlohy

1. Vyjadrite komplexnú frekvenčnú charakteristiku napäťového prenosu $\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{U}_2(\omega) / \boldsymbol{U}_1(\omega)$ pre obvod (dvojbran) v čiarkovane vyznačenom obdĺžniku v zapojení na obr.1.
2. Komplexnú frekvenčnú charakteristiku prenosu $\boldsymbol{H}(\omega)$ upravte ako podiel súčinov koreňových činiteľov čitateľa a menovateľa a vyjadrite logaritmickú amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku $H_{\mathrm{dB}}(\omega)$ a fázovú frekvenčnú charakteristiku $\varphi(\omega)$.
3. Pre zadané hodnoty prvkov obvodu vypočítajte nuly a póly komplexnej frekvenčnej charakteristiky $\boldsymbol{H}(\omega)$ a do grafu s logaritmickou mierkou pre uhlovú frekvenciu ω nakreslite asymptoty logaritmickej amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky obvodu.
4. Vypočítajte hodnotu amplitúdy prenosu H_0 v optime prenosovej krivky.
5. Pre zvolený rozsah frekvencií určite meraním amplitúdový prenos $H(\omega)$, vypočítajte zodpovedajúce hodnoty $H_{\mathrm{dB}}(\omega)$ a tieto zakreslite do charakteristiky z bodu 3. Z charakteristiky odčítajte hodnotu amplitúdy prenosu H_0, v optime prenosovej krivky a porovnajte ju s vypočítanou hodnotou.

Zapojenie meracieho zariadenia



Obr. 1 Analyzovaný lineárny obvod

Parametre analyzovaného obvodu: $R_1 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $C_1 = 100\ \mathrm{nF}$, $R_2 = 22\ \mathrm{k\Omega}$, $C_2 = 1\ \mathrm{nF}$

Postup pri riešení úlohy

1. Prenosovú funkciu analyzovaného obvodu (dvojbranu) $\boldsymbol{H}(\omega)$ možno vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{U}_2(\omega)}{\boldsymbol{U}_1(\omega)} = H(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\cdot\varphi(\omega)} = \frac{1}{R_2C_2}\cdot\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2 + \mathrm{j}\omega\cdot\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}\right)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

2. Prenosová funkcia po úprave na podiel súčinov koreňových činiteľov čitateľa a menovateľa má tvar

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1}{R_2C_2}\cdot\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega - p_1)\cdot(\mathrm{j}\omega - p_2)}$$

kde p_1, p_2 sú korene menovateľa. Ak zavedieme označenie $\omega_{p1} = -p_1$, $\omega_{p2} = -p_2$, je

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1}{R_2C_2}\cdot\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega + \omega_{p1})\cdot(\mathrm{j}\omega + \omega_{p2})} = \frac{1}{R_2C_2.\omega_{p2}}\cdot\frac{\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p1}}}{(1+\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p1}})\cdot(1+\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p2}})}$$

Amplitúdová frekvenčná charakteristika je

$$H(\omega) = |\boldsymbol{H}(\omega)| = \frac{1}{R_2C_2.\omega_{p2}}\cdot\frac{\left|\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right|}{\left|(1+\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p1}})\right|\cdot\left|(1+\mathrm{j}\cdot\frac{\omega}{\omega_{p2}})\right|}$$

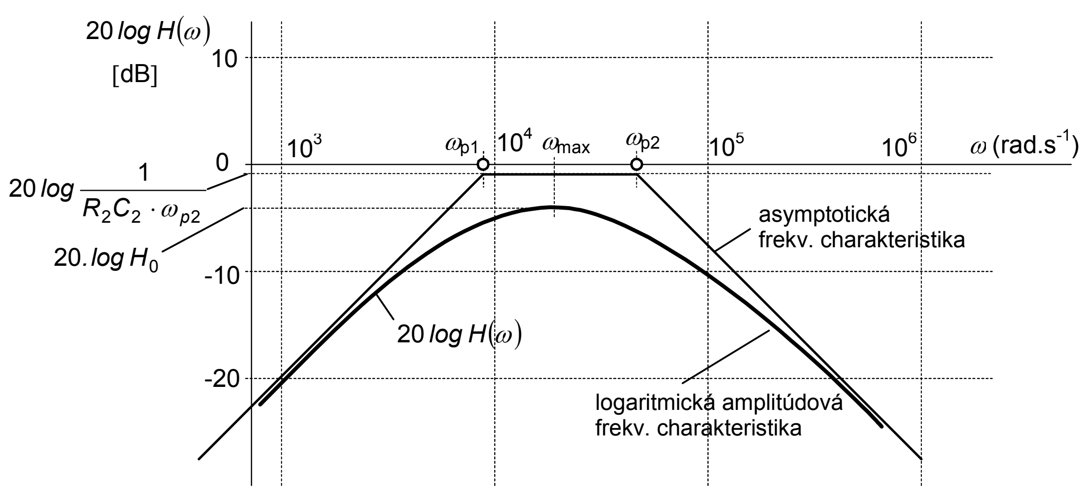
Logaritmická amplitúdová frekvenčná charakteristika je definovaná vzťahom $H_{\mathrm{dB}}(\omega)$ = 20. log $H(\omega)$

$$H_{dB}(\omega) = 20.\,log\left(\frac{1}{R_2C_2.\omega_{p2}}\right) + 20\,log\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) - 20.\,log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^2} - 20.\,log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^2}$$

Fázová frekvenčná charakteristika $\varphi(\omega)$ = arg [$\boldsymbol{H}(\omega)$] je

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) - arctg\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)$$

3. Logaritmická amplitúdová frekvenčná charakteristika $H_{\mathrm{dB}}(\omega)$ analyzovaného obvodu (v logaritmickej mierke pre frekvenciu) je na obr. 2 nakreslená tučnou čiarou.



Obr.2 Logaritmická amplitúdová frekvenčná charakteristika analyzovaného obvodu

Skutočnú amplitúdovú charakteristiku možno aproximovať asymptotami. Funkcia $\boldsymbol{H}(\omega)$ má nuly pri frekvenciách $\omega = 0$ a $\omega \to \infty$, póly pri frekvenciách ω_{p1} a ω_{p2}. Pre zadané hodnoty parametrov R_1, C_1, R_2, C_2 vypočítame frekvencie ω_{p1} a ω_{p2}. Asymptotická charakteristika funkcie $H_{\mathrm{dB}}(\omega)$ má tri časti (pozri obr. 2).

Asymptota pre $\omega < \omega_{p1}$ a asymptota pre $\omega > \omega_{p2}$ majú sklon 20 dB/dekádu, t. j. pri desaťnásobnom zmenšení/zväčšení frekvencie sa hodnoty na asymptotách zmenia o 20 dB. Asymptota pre $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$ má nulový sklon (je rovnobežná s osou ω). Na základe vypočítaných číselných hodnôt vynesieme do grafu póly amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky ω_{p1} a ω_{p2} a zakreslíme jej asymptoty.

Z amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky vidno, že obvod sa chová ako pásmový priepust, pričom útlm je nenulový, t. j. $U_2/U_1 < 1$ aj v priepustnom pásme (medzi frekvenciami ω_{p1} a ω_{p2}).

4. Optimum prenosovej charakteristiky je pri frekvencii ω_0, pri ktorej je minimálny útlm, čiže je maximálny pomer napätí U_2 / U_1. Hodnota amplitúdy prenosu v optime prenosovej krivky je $H_0 = \left|\boldsymbol{H}\left(\omega_{\max}\right)\right|$, pričom frekvenciu ω_0 určíme z podmienky $\left.\dfrac{d\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|}{d\omega}\right|_{\omega_0} \overset{!}{=} 0$

   Riešením dostaneme $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} = 1\big/\sqrt{R_1R_2C_1C_2}$ a po dosadení $H_0 = \dfrac{R_1C_1}{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2}$

   Optimum prenosu (v dB) je $H_{0\,\mathrm{dB}} = 20 \,.\, \log H_0$.

   Pre zadané parametre obvodu vypočítame ω_0 a $H_{0\,\mathrm{dB}}$.

5. Vyšetrovaný obvod pripojíme na zdroj harmonického napätia s premenlivou frekvenciou a pre každú zvolenú frekvenciu f odmeriame voltmetrom (alebo osciloskopom) vstupné napätie U_1 a výstupné napätie U_2. Hodnotu prenosu v dB vypočítame z výrazu $H_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20.\, \log\,(U_2 / U_1)$. Takto určené hodnoty vo zvolenom rozsahu frekvencií vynesieme do grafu so zakreslenými asymptotami.

   Z grafu odčítame hodnoty ω_0 a $H_{0\,\mathrm{dB}}$ a porovnáme ich s hodnotami určenými výpočtom podľa bodu 4.