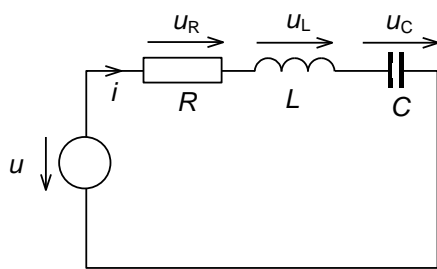


Sériový rezonančný obvod

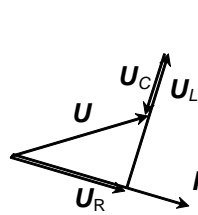
Všeobecne

Tak ako v rôznych iných fyzikálnych sústavách, aj v elektrických obvodoch, vyznačujúcich sa určitými vlastnosťami, dochádza pri zhode vnútených a vlastných kmitov sústavy k výraznému zväčšeniu amplitúdy kmitov, teda k rezonančnému javu. Elektrické obvody využívajúce tento jav sa nazývajú rezonančné obvody, a túto ich vlastnosť využívame napr. na výber (detekciu) alebo potlačenie (filtráciu) napätia, resp. prúdu určitých frekvencií. V elektrickom obvode môže dôjsť k rezonancii len vtedy, ak sa v ňom súčasne vyskytujú prvky akumulujúce elektrickú a magnetickú energiu, teda kapacitory a induktory.

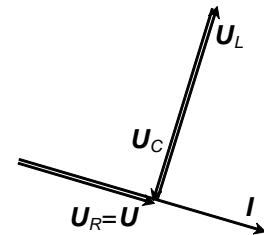
Najjednoduchší sériový rezonančný obvod vznikne spojením troch základných prvkov, a to rezistora, kapacitora a induktora za sebou (obr.1). Ak sa obvod napája zo zdroja harmonického napätia, analýzu obvodu môžeme robiť v komplexnom tvare (použitím fázorov napätia a prúdu), vo forme fázorových diagramov. Na grafické znázorňovanie komplexných funkcií prúdu, napätia alebo ich pomeru v závislosti od zvolenej premennej (napríklad frekvencie) využívame tzv. fázorové nomogramy. Praktické využitie majú najmä z nich odvodené tzv. amplitúdové a fázové charakteristiky obvodu.



a) sériový RLC obvod



b) fázorový diagram obvodu pre jeden zvolený stav



c) fázorový diagram obvodu v rezonancii

Obr. 1

Vyšetríme sériový RLC obvod pripojený k zdroju harmonického napätia $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$, znázornený na obr.1a. Podľa II. Kirchhoffovho zákona pre fázory napätia v obvode platí

$$-U + U_R + U_L + U_C = 0$$

teda

$$-U + R \cdot I + j\omega L \cdot I + \frac{1}{j\omega C} \cdot I = 0$$

Fázor prúdu je

$$I = \frac{U}{R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Fázorový diagram napätí a prúdu obvodu, zakreslený pre jeden zvolený stav, je na obr.1 b. Z výrazu pre prúd vyplýva, že zmenou parametrov obvodu (C , L alebo ω) je možné dosiahnuť stav, keď sa obvod chová ako obvod len s rezistorom R . Podmienkou pre tento stav obvodu, ktorý označujeme ako rezonančný stav, je splnenie rovnosti

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Túto podmienku možno pri konštantných hodnotách parametrov C , L splniť zmenou uhlovej frekvencie ω , pričom pre túto význačnú uhlovú frekvenciu, tzv. rezonančnú uhlovú frekvenciu $\omega = \omega_{\text{rez}}$ platí

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

Pri splnení rezonančnej podmienky je veľkosť napätia na induktore rovnaká ako na kapacitore, pričom tieto napätia sú v protifáze (pozri obr.1c). V rezonancii je celé napätie zdroja na rezistore, pričom v obvode s malým odporom R môže byť napätie na kapacitore a induktore omnoho väčšie ako je napájacie napätie obvodu. Prúd obvodu je v rezonančnom stave maximálny, jeho fáza je rovnaká ako fáza napätia zdroja. Fázor prúdu je

$$I(\omega = \omega_{rez}) = I_{rez} = \frac{U}{R} \quad (2)$$

Ak z praktických dôvodov zavedieme pomerný prúd, je tento v komplexnom tvare

$$\frac{I(\omega)}{I_{rez}} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j Q \Omega} \quad (3)$$

kde Q a Ω sú veličiny s rozmerom 1 (v minulosti sa používalo označenie „bezrozmerné veličiny“)

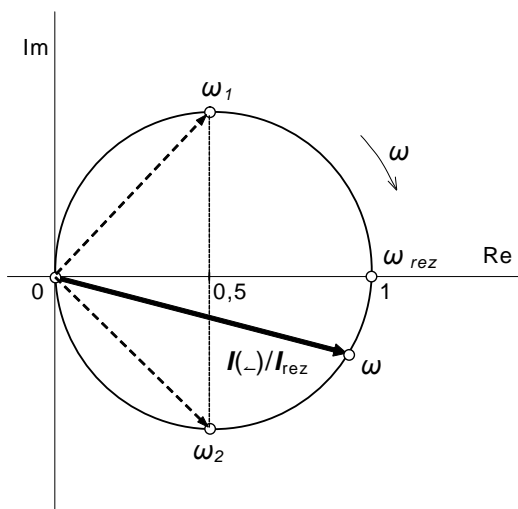
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{– faktor kvality sériového rezonančného obvodu} \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega} \quad \text{– faktor pomerného rozladenia} \quad (5)$$

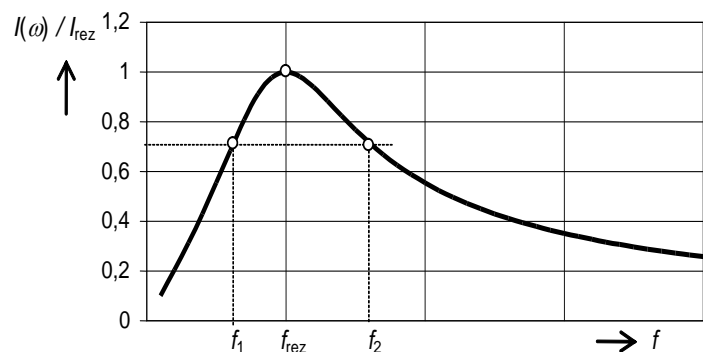
Veľkosť (efektívna hodnota) pomerného prúdu je

$$\frac{I(\omega)}{I_{rez}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega} \right) \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Q\Omega)^2}} \quad (6)$$

Závislosť komplexného pomerného prúdu od uhlovej frekvencie môžeme graficky zobrazit ako komplexnú funkciu premennej ω , a to využitím komplexného nomogramu $I(\omega)/I_{rez}$ v závislosti od ω (obr.2 a). Častejšie sa používa amplitúdová charakteristika, t. j. závislosť veľkosti pomerného prúdu $I(f)/I_{rez}$ od frekvencie $f = \omega/2\pi$ (obr.2b).



a) Fázorový nomogram obvodu



b) Amplitúdová charakteristika obvodu

Obr. 2

Prúd nadobúda najväčšie hodnoty v okolí rezonančnej frekvencie. Pri malých, resp. veľkých frekvenciách je prúd malý, čiže obvod sa chová ako pásmový priepust. Za pásmo priepustnosti rezonančného obvodu sa považuje interval frekvencie $< f_1, f_2 >$, v ktorom veľkosť pomerného prúdu $I(f)/I_{rez}$ neklesne pod hodnotu $1/\sqrt{2}$ (v obvykle používanej logaritmickej miere tomu zodpovedá pokles $20 \cdot \log(1/\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$).

Frekvencie ω_1, ω_2 môžeme určiť podľa vzťahu (6) z podmienky

$$\left[\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega} \right) \right]^2 = (Q\Omega)^2 = \pm 1, \quad \text{čiže } \Omega_{1,2} = \mp \frac{1}{Q}$$

Táto podmienka vedie pre obe znamienka na kvadratické rovnice pre premennú ω , ich riešením sa určia uhlové frekvencie ω_1 a ω_2 , resp. frekvencie f_1 a f_2

$$\omega_{1,2} = \omega_{\text{rez}} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q} \right] \quad \text{resp.} \quad f_{1,2} = f_{\text{rez}} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q} \right] \quad (7)$$

a odtiaľ pásmo priepustnosti sériového rezonančného obvodu

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_{\text{rez}} \cdot \frac{1}{Q} \quad (8)$$

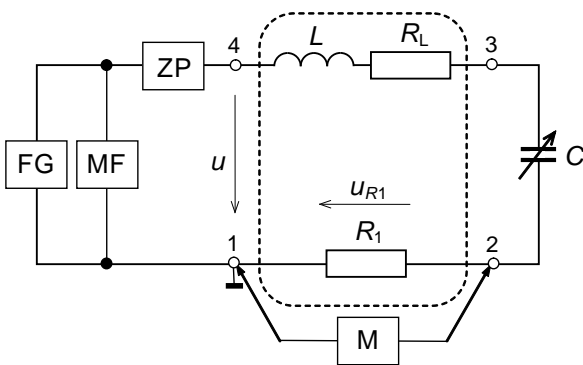
Faktor kvality Q priamo súvisí s pásmom priepustnosti rezonančného obvodu – obvody s väčšou hodnotou faktora kvality Q majú užšie pásmo priepustnosti Δf a naopak.

Pri meraní na reálnom obvode (ktorý obsahuje reálne, tzv. technické prvky, teda nie ideálne prvky s jediným určujúcim parametrom), môžeme z hľadiska riešenia použiť ako náhradný obvod ideálny elektrický obvod, zostavený z troch ideálnych prvkov s hodnotami parametrov R , L a C podľa obr. 1.

Úlohy

1. V sériovom rezonančnom obvode podľa obr. 4 so zadanými hodnotami L , R_L a R_1 zvolte hodnotu kapacity C a vypočítajte rezonančnú uhlovú frekvenciu ω_{rez} , rezonančnú frekvenciu f_{rez} , rezonančný prúd I_{rez} , faktor kvality Q a šírku pásma priepustnosti Δf .
2. V obvode nastavte predpísanú hodnotu napätia U . Pri konštantnej hodnote veľkosti napätia U meraním určite amplitúdovú rezonančnú charakteristiku obvodu $I(f)/I_{\text{rez}}$.
3. Odmeranú rezonančnú charakteristiku obvodu $I(f)/I_{\text{rez}}$ znázorníte graficky.
4. Na odmeranom priebehu rezonančnej charakteristiky odčítajte hodnotu I_{rez} a rezonančnú frekvenciu f_{rez} . Hodnoty určené z merania porovnajte s vypočítanými hodnotami podľa bodu 1.
5. Na odmeranej rezonančnej charakteristike určite šírku pásma priepustnosti Δf , hodnotu faktora kvality Q a porovnajte ich s hodnotami vypočítanými podľa bodu 1.
6. Z nameranej hodnoty prúdu I_{rez} stanovte efektívny odpor cievky pri rezonančnej frekvencii a porovnajte ho s odporom, odmeraným jednosmerným prúdom. Urobte diskusiu o výsledkoch merania.

Schéma a opis zapojenia



obr.4

Prípravok (modul 1-2-3-4) zapojíme podľa obr.4.

Hodnoty prvkov sú:

$$L = 15,71 \text{ mH}$$

$$R_L = 11,3 \Omega$$

$$R_1 = 10,0 \Omega$$

C – odporúčaná hodnota 40 až 80 nF

Prístroje:

FG – zdroj napätia (funkčný generátor)

MF – merač frekvencie

ZP – zosilňovač prúdu

M – voltmeter (multimeter)

C – kapacitná dekáda

Postup pri meraní a vyhodnotení

1. Pre zvolenú hodnotu kapacity C a celkovú rezistanciu meraného obvodu $R = R_1 + R_L$ vypočítame rezonančnú uhlovú frekvenciu ω_{rez} zo vzťahu (1) a rezonančnú frekvenciu $f_{\text{rez}} = \omega_{\text{rez}}/2\pi$. Pre zvolenú efektívnu hodnotu napájacieho napätia U vypočítame rezonančný prúd I_{rez} zo vzťahu (2), faktor kvality Q zo vzťahu (4) a šírku pásma priepustnosti Δf zo vzťahu (8). Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky 1.
2. Na kapacitnej dekáde nastavíme zvolenú hodnotu kapacity C . Všetky prístroje zapojíme do obvodu podľa obr. 4 a postupne budeme nastavovať rôzne frekvencie napájacieho napätia. Konštantnú hodnotu napájacieho napätia pri každej nastavenej frekvencii (odporúčaná hodnota $U = 0,4$ až $0,6$ V) nám zabezpečí zosilňovač prúdu ZP. Následne zmeriame prúd I v obvode. Treba zdôrazniť, že na meranie prúdu nepoužijeme prúdový vstup

multimetra (jeho vnútorná impedancia by mohla ovplyvniť celkovú impedanciu obvodu), ale multimetrom odmeriame napätie U_{R_1} na rezistore R_1 (medzi svorkami 2-1) a prúd určíme z podielu $I = U_{R_1}/R_1$.

Hodnoty frekvencií volíme tak, aby sme odmerali dostatočný počet bodov pod rezonančnou a nad rezonančnou frekvenciou. Hustejšie merania urobíme v okolí teoreticky vypočítanej rezonančnej frekvencie, aby sme dobre vystihli rezonančnú krivku obvodu a zároveň čo najpresnejšie určili maximálnu hodnotu prúdu, t. j. rezonančný prúd I_{rez} a jemu prislúchajúcu rezonančnú frekvenciu f_{rez} .

3. Z nameraných hodnôt zostrojíme rezonančnú charakteristiku – graficky zobrazíme závislosť veľkosti $I(f)/I_{rez}$.
4. Pre extrém závislosti $I(f)/I_{rez}$, odčítame hodnotu rezonančnej frekvencie f_{rez} . Hodnoty I_{rez} a f_{rez} zapíšeme do tabuľky 1 a porovnáme ich s hodnotami vypočítanými podľa bodu 1.
5. Na nameranej grafickej závislosti $I(f)/I_{rez}$ vyznačíme body, v ktorých veľkosť pomerného prúdu $I(f)/I_{rez}$ je $1/\sqrt{2}$. Pre tieto body odčítame hraničné hodnoty frekvencie f_1 a f_2 a určíme šírku pásma priepustnosti $\Delta f = f_2 - f_1$. Z takto určenej šírky pásma priepustnosti vypočítame faktor kvality $Q = f_{rez}/\Delta f$. Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky 1 a porovnáme ich s vypočítanými hodnotami podľa bodu 1.
6. V doterajších úvahách sme predpokladali, že sériový rezonančný obvod je zložený z ideálnych lineárnych prvkov R, L, C . Reálne obvody však také nie sú, a to platí aj pre obvod ktorý sme vyšetrovali meraním. V našom obvode sa, okrem iných vplyvov, prejavuje aj vplyv striedavého magnetického poľa, ktoré je zosilnené feromagnetickým jadrom cievky, a toto spôsobuje tzv. skin efekt. Ten má za následok zväčšenie odporu cievky pri striedavom prúde (tzv. efektívny odpor $R_{L_{ef}}$) oproti odporu R_L pri jednosmernom prúde. Tým sa ovplyvňujú aj vlastnosti reálneho rezonančného obvodu, ako sú šírka pásma a faktor kvality. Navyše, efektívny odpor cievky je pri rôznych frekvenciách rôzny. Efektívny odpor cievky $R_{L_{ef}}$ pri rezonančnej frekvencii určíme z výsledkov merania v rezonančnom stave zo vzťahu

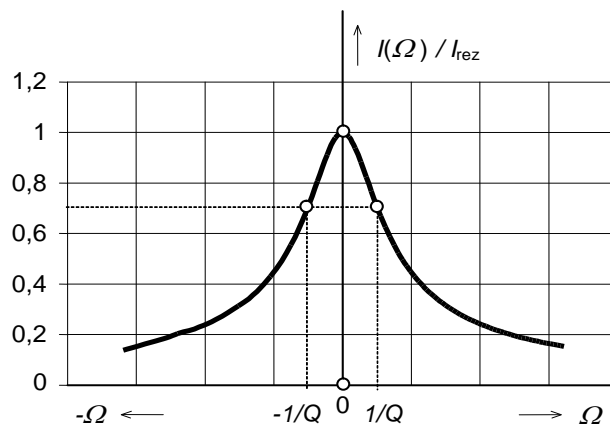
$$R_{L_{ef}} = \frac{U}{I_{rez}} - R_1, \text{ pričom } R_{L_{ef}} > R_L$$

Tab. 1 Porovnanie vypočítaných a nameraných hodnôt

Hodnoty	I_{rez} (mA)	f_{rez} (Hz)	Δf (Hz)	Q
vypočítané				
namerané				

Poznámka

Z obrázka 2b vidno, že závislosť pomerného prúdu od frekvencie $I(f)/I_{rez}$ je pre $\omega < \omega_{rez}$ strmšia ako pri $\omega > \omega_{rez}$. Preto sa niekedy používa znázornenie pomerného prúdu v závislosti od faktora pomerného rozladenia Ω , zavedeného vzťahom (3). Závislosť $I(\Omega)/I_{rez}$ je na obrázku 3.



Obr. 3