

## Všeobecne

Niektoré elektrické obvody nespĺňajú predpoklady, za ktorých boli zavedené ideálne prvky, nemožno ich preto modelovať obvodmi so sústredenými parametrami. Sú to obvody, pri ktorých nemožno oddeliť elektrickú a magnetickú energiu a sústrediť ich do priestorovo malých častí obvodu. Parametre týchto obvodov preto nie sú konštanty, ale sú funkciami geometrických súradníc. Takéto obvody modelujeme obvodmi s rozloženými parametrami. Typickým prípadom je dlhé dvojvodičové vedenie: napätie a prúd vo vedení sú nielen funkciami času, ale aj vzdialenosti  $x$  uvažovaného miesta od začiatku vedenia.

Napätia a prúdy v týchto obvodoch možno interpretovať ako superpozíciu priamych a spätných postupných vln, šíriacich sa vedením rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Pri harmonických napätiach a prúdoch na vedení je vlnová dĺžka postupnej vlny (priamej aj spätnej)  $\lambda = v_f/f$ , kde  $v_f$  je rýchlosť šírenia vlny (tzv. fázová rýchlosť) a  $f$  je frekvencia.

### Poznámka

Reálny obvod možno modelovať obvodom so sústredenými parametrami len ak je dĺžka vedenia  $l \ll \lambda$ . V opačnom prípade treba ako model použiť obvod s rozloženými parametrami. Napr. ak uvažujeme vedenie s dĺžkou  $l = 3\,000$  km určené na prenos elektrickej energie s frekvenciou 50 Hz a predpokladáme rýchlosť šírenia vln na vedení  $v_f \approx c$ , vlnová dĺžka je  $\lambda = v_f/f = 3 \cdot 10^8/50 = 6 \cdot 10^6$  m = 6 000 km, teda porovnateľná s vlnovou dĺžkou, vedenie treba riešiť ako obvod s rozloženými parametrami. K rovnakému záveru dospejeme, ak je vedenie dlhé iba 1 m, ale zdroj má frekvenciu  $10^8$  Hz, kedy je  $\lambda = 3$  m.

Vedenie s rozloženými parametrami modelujeme tzv. článkovým vedením, pričom jeden článok je dvojbran charakterizujúci elementárnu časť vedenia dĺžky  $dx$ . Celé vedenie je reprezentované takýmito elementárnymi článkami zapojenými za sebou. Ak sú pomery na celej dĺžke vedenia rovnaké, sú rovnaké aj všetky články, hovoríme o homogénnom vedení.

Ak sa dvojvodičové homogénne vedenie napája na začiatku harmonickým napätím, napätia a prúdy v jednotlivých miestach vedenia sú tiež harmonické, teda môžeme ich analyzovať komplexnou metódou. Napätové a prúdové pomery na dvojvodičovom vedení v harmonickom ustálenom stave charakterizujú predovšetkým dve (vo všeobecnosti komplexné) veličiny:

$$\text{konštantá šírenia} \quad \gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j \cdot \beta \quad (\text{m}^{-1}) \quad (1)$$

kde  $R_0$  ( $\Omega/\text{m}$ ),  $L_0$  (H/m),  $G_0$  (S/m),  $C_0$  (F/m), t. j. odpor, vlastná indukčnosť, zvod (izolačný odpor) a kapacita medzi vodičmi, sú základné parametre vedenia na jednotku dĺžky,

$\alpha$  je konštantá tlmenia (udáva zmenu amplitúdy postupnej vlny na jednotku dĺžky),

$\beta$  fázová konštantá (udáva zmenu fázy postupnej vlny na jednotku dĺžky).

$$\text{charakteristická (vlnová) impedancia vedenia} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_0 \cdot e^{j\varphi z} \quad (\Omega) \quad (2)$$

Ďalšie veličiny a vzťahy medzi nimi, ktoré charakterizujú pomery na vedení, sú:

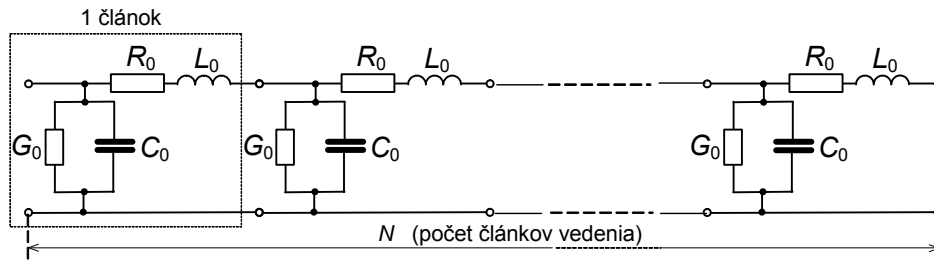
$$\begin{array}{ll} \text{fázová rýchlosť} & v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{m/s}) & \text{vlnová dĺžka} & \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{m}) \\ \text{konštantá tlmenia} & \alpha = \frac{1}{l} \cdot \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \quad (\text{Np/m}) & \text{fázová konštantá} & \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/m}) \end{array} \quad (3)$$

pričom  $l$  je dĺžka vedenia,  $U_1$ ,  $U_2$  sú napätia (efektívne hodnoty) na začiatku, resp. na konci vedenia,  $\omega = 2\pi f$  je uhlová frekvencia.

Na účely laboratórneho cvičenia je homogénne vedenie dĺžky  $l$  (m) nahradené laboratórnym modelom s konečným počtom článkov. Na obr. 1 je schéma takéhoto článkového vedenia. Pri tomto modeli teda nepracujeme s obvyklým poňatím dĺžky vedenia  $l$ , ale s počtom článkov  $N$ . Preto aj parametre vedenia, ktorými modelujeme homogénne vedenie, nie sú tu vzťahnuté na jednotku dĺžky, ale na 1 článok. Odpor vedenia jedného článku je  $R_0$  ( $\Omega \cdot \text{čl.}^{-1}$ ), vlastná indukčnosť  $L_0$  (H. čl.<sup>-1</sup>), zvod  $G_0$  (S. čl.<sup>-1</sup>) a kapacita  $C_0$  (F. čl.<sup>-1</sup>). V náhradnej schéme takéhoto modelu však vystupujú parametre vynásobené „dĺžkou“ jedného článku ( $x$  1 čl.), teda  $R_0 \cdot 1$  je v  $\Omega$ ,  $L_0 \cdot 1$  je v H,  $G_0 \cdot 1$  je v S,  $C_0 \cdot 1$  je vo F. Aj v príslušných vzťahoch sa jednotka meter nahradí 1 článkom. Napr. vzťahy (3) sú

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{čl./s}) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{čl.}) \quad \alpha = \frac{1}{N} \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \quad (\text{Np/čl.}) \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/ čl.}) \quad (4)$$

a podobne aj v ďalších vzťahoch.



obr.1. Článkový model homogénneho vedenia

Na jednom paneli laboratórneho modelu je 21 článkov. Každý článok má vyvedenú svorku, čo umožňuje merať napätia na rôznych miestach vedenia. Na modelovanie vedenia v laboratórnej úlohe možno použiť jeden alebo viac panelov zapojených za sebou.

Veľkosť (efektívna hodnota) napätí na jednotlivých miestach vedenia vo všeobecnosti závisí popri parametroch vedenia aj od impedancie  $Z_2$ , ktorou je vedenie na konci zaťažené. Vyšetruvať budeme tri špecifické prípady:

a) Vedenie na konci rozpojené (stav naprázdno),  $Z_2 \rightarrow \infty$

V stave naprázdno vznikajú superpozíciou priamej a späťnej vlny stojaté vlny, pri ktorých sa na vedení striedajú maximá a minimá napätia. Minimá a maximá sú vzájomne vzdialené o  $\lambda/4$ , pričom na konci vedenia je tzv. napäťová kmitňa.

b) Vedenie zakončené skratom (stav nakrátko),  $Z_2 = 0$

Aj v tomto prípade sú na vedení stojaté vlny, pričom na konci vedenia je tzv. napäťový uzol ( $U_2 = 0$ ).

c) Vedenie zakončené charakteristickou (vlnovou) impedanciou,  $Z_2 = Z_0$

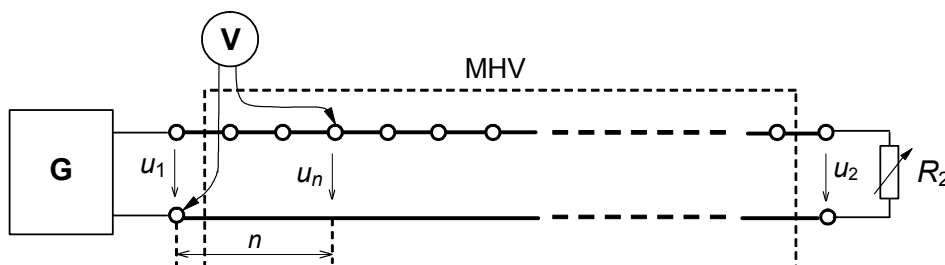
V tomto prípade je na vedení len priama vlna (nevzniká odraz na konci vedenia), stojaté vlnenie nevzniká.

## Úloha

Je daný model homogénneho vedenia s  $N$  článkami, ktorých prvky majú hodnoty  $R_0$  ( $\Omega/\text{čl.}$ ),  $L_0$  ( $\text{H}/\text{čl.}$ ),  $G_0$  ( $\text{S}/\text{čl.}$ ),  $C_0$  ( $\text{F}/\text{čl.}$ ). Na začiatok vedenia je pripojené harmonické napätie  $u_1(t)$  s frekvenciou  $f$  a efektívnou hodnotou  $U_1$ .

1. Pre zadané parametre vedenia a pre zvolenú frekvenciu  $f$  vypočítajte konštantu šírenia  $\gamma = \alpha + j\beta$ , charakteristickú impedanciu vedenia  $Z_0$ , fázovú rýchlosť  $v_f$  a vlnovú dĺžku  $\lambda$ .
2. Pri konštantnej hodnote napájacieho napätia  $U_1$  a konštantnej frekvencii  $f$  odmerajte a následne graficky znázorníte priebeh efektívnej hodnoty napätia  $U$  pozdĺž vedenia pre
  - 2.1 vedenie na konci rozpojené (stav naprázdno),
  - 2.2 vedenie zakončené skratom (stav nakrátko),
  - 2.3 vedenie zakončené charakteristickou impedanciou  $Z_0$ .
3. Z nameraných hodnôt napätia na vedení určite konštantu tlmenia  $\alpha$ , fázovú konštantu  $\beta$ , fázovú rýchlosť  $v_f$  a vlnovú dĺžku  $\lambda$ . Porovnajte hodnoty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v_f$  a  $\lambda$  získané z merania s hodnotami určenými výpočtom na základe zadaných parametrov vedenia z bodu 1.
4. Z priebehu napätia pozdĺž vedenia, nameraného podľa 2.1, resp. 2.2 vypočítajte pomer stojatých vln PSV a koeficient odrazu na konci vedenia  $\rho_2$  a porovnajte ho s hodnotou určenou teoretickým výpočtom.

## Zapojenie meracieho zariadenia



G – generátor harmonického napätia s premenlivou frekvenciou,  
 V – voltmeter,  
 MHV – model homogénneho vedenia – článkové vedenie s počtom článkov  $N$ ,  
 $R_2$  – regulačný zaťažovací rezistor.

### Spracovanie merania

1. Na základe známych hodnôt  $R_0$  ( $\Omega$ /čl.),  $L_0$  (H/čl.),  $G_0$  (S/čl.),  $C_0$  (F/čl.) a zvolenej frekvencie  $f$  (Hz) vstupného napätia  $u_1(t)$  vypočítame parametre vedenia

konštanta šírenia  $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j \cdot \beta \quad (1/\text{čl.})$

charakteristická impedancia  $Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_0 \cdot e^{j\varphi_z} \quad (\Omega)$

fázová rýchlosť  $v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{čl./s})$  vlnová dĺžka  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{čl.})$

2. Pre zvolenú frekvenciu  $f$  a konštantnú efektívnu hodnotu napätia  $U_1$  (V) odmeriame rozloženie napätia na vedení podľa bodov 2.1 až 2.3 a namerané hodnoty vynesieme do grafu v závislosti od miesta na vedení (pre  $n = 1$  až  $N$ ).
3. Na priebehoch napätia na vedení z meraní 2.1, resp. 2.2 určíme vzdialenosť medzi dvoma najbližšími minimami na vedení. Táto vzdialenosť je  $\lambda/2$  (vzdialenosť  $\lambda/2$  určujeme z minimým priebehu, pretože sú ostrejšie ako maximá). Určíme vlnovú dĺžku, fázovú konštantu a fázovú rýchlosť

$\lambda$  (čl.)  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/čl.})$   $v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{čl./s})$

Konštantu tlmenia  $\alpha$  určíme z merania 2.3, z pomeru veľkostí napätia na začiatku  $U_1$  a na konci vedenia  $U_2$  a dĺžky vedenia  $N$  (počet článkov vedenia)

$\alpha = \frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \quad (\text{Np/čl.})$

4. Koefficient odrazu v určitom mieste na vedení (vo všeobecnosti je to komplexná veličina) je definovaný ako pomer fázora spätnej vlny  $U_S$  k fázoru priamej vlny  $U_P$  na danom mieste, pričom pre koefficient odrazu na konci vedenia  $\rho_2$  platí

$\rho_2 = \frac{U_{2S}}{U_{2P}} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = |\rho_2| \cdot e^{j\delta_2} = \rho_2 \cdot e^{j\delta_2} \quad \text{resp. veľkosť } \rho_2 = |\rho_2| = \left| \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \right|$

Z týchto vzťahov vypočítame koefficient odrazu a jeho veľkosť pre stav naprázdno ( $\rho_{20}$ ,  $\rho_{20}$ ), pre stav nakrátko ( $\rho_{2k}$ ,  $\rho_{2k}$ ) a pre zaťaženie vedenia charakteristickou impedanciou  $Z_2 = Z_0$  ( $\rho_{2Z0}$ ,  $\rho_{2Z0}$ ).

Z nameraného priebehu napätia podľa bodov 2. 1, resp. 2.2 odčítame hodnoty prvého maxima  $U_{\max}$  a prvého minima napätia  $U_{\min}$  od konca vedenia a vypočítame hodnotu pomeru stojatých vln (PSV) a veľkosť koefficienta odrazu na konci vedenia  $\rho_2$ .

$\text{PSV} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \quad \rho_2 = \frac{\text{PSV} - 1}{\text{PSV} + 1}$

Určíme hodnoty koefficienta odrazu pre stav naprázdno  $\rho_{20}$  a stav nakrátko  $\rho_{2k}$  a porovnáme ich s hodnotami určenými výpočtom pomocou impedancií  $Z_2$  a  $Z_0$ .

### Porovnávací tabuľka vypočítaných a nameraných hodnôt

| Hodnoty    | $Z_0$ ( $\Omega$ ) | $\gamma$ (čl. <sup>-1</sup> ) | $\alpha$ (Np.čl. <sup>-1</sup> ) | $\beta$ (rad.čl. <sup>-1</sup> ) | $v_f$ (čl.s <sup>-1</sup> ) | $\lambda$ (čl.) | $\rho_{20}$ (1) | $\rho_{2k}$ (1) |
|------------|--------------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Vypočítané |                    |                               |                                  |                                  |                             |                 |                 |                 |
| Merané     |                    |                               |                                  |                                  |                             |                 |                 |                 |

#### Poznámka

Na ideálnom bezstratovom vedení ( $R_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ ) nedochádza k útlmu, konštanta tlmenia  $\alpha = 0$  Na ideálnom vedení v stave naprázdno aj nakrátko sú maximá napätia na celom vedení rovnaké, v minimách je vždy  $U = 0$ . Pri zakončení ideálneho vedenia charakteristickou impedanciou je veľkosť (efektívna hodnota) napätia na celom vedení rovnaká.

Naproti tomu, na reálnom vedení dochádza k útlmu, maximá napätia sa smerom ku koncu vedenia znižujú a v minimách nie sú hodnoty napätia nulové (náš článkový model vedenia zodpovedá vedeniu s malým tlmením, keďže  $R_0 \neq 0$ ). Pri zakončení reálneho vedenia charakteristickou impedanciou veľkosť napätia na vedení nie je konštantná, ale smerom ku koncu vedenia klesá.

Pritom treba mať neustále na zreteli, že sa to týka veľkostí (efektívnych hodnôt) napätia na vedení, pričom časový priebeh všetkých napätí a prúdov v obvode je harmonický.