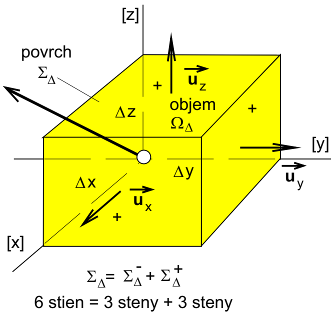
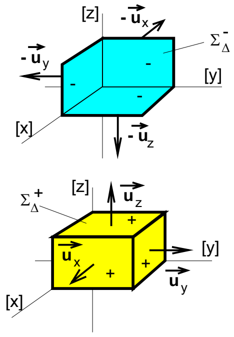
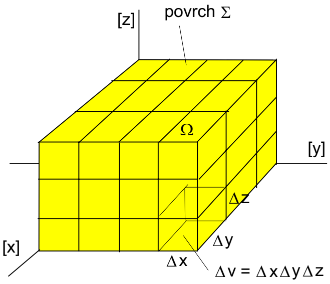
DIVERGENCIA

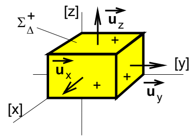






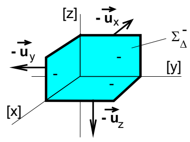
Počítajme výtok cez povrch Σ_Δ ohraničujúci objem Ω_Δ, a výsledok delme veľkosťou tohoto objemu. Výpočet urobme v dvoch krokoch: najprv po troch stenách (označených symbolom +) s kladnou orientáciou jednotkových vektorov (v smere osí x, y, z)

$$\frac{1}{\Delta v}\iint\limits_{\Sigma_\Delta^+} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} \approx \frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left(F_x^+\Delta y\Delta z + F_y^+\Delta x\Delta z + F_z^+\Delta x\Delta y\right) = \frac{F_x^+}{\Delta x}+\frac{F_y^+}{\Delta y}+\frac{F_z^+}{\Delta z}$$



a potom po troch stenách (označených symbolom -) so zápornou orientáciou jednotkových vektorov (v smere osí -x, -y, -z)

$$\frac{1}{\Delta v}\iint\limits_{\Sigma_\Delta^-} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} \approx \frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left(-F_x^-\Delta y\Delta z - F_y^-\Delta x\Delta z - F_z^-\Delta x\Delta y\right) = -\frac{F_x^-}{\Delta x}-\frac{F_y^-}{\Delta y}-\frac{F_z^-}{\Delta z}$$



sčítaním oboch výsledkov (pri označení: $\Delta F = F^{+} - F^{-}$) dostávame:

$$\frac{1}{\Delta v}\oiint\limits_{\Sigma_\Delta} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} \approx \frac{\Delta F_x}{\Delta x}+\frac{\Delta F_y}{\Delta y}+\frac{\Delta F_z}{\Delta z} \quad\to\quad \boxed{\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\oiint\limits_{\Sigma_\Delta=\Sigma_\Delta^+ + \Sigma_\Delta^-} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} = div\vec{\mathbf{F}}} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Keď sa veľkosť objemu Ω_Δ, po hranici (povrch Σ_Δ) ktorého integrujeme blíži k nule $\Delta v \to dv$, a následne $\Delta F/\Delta x \to \partial F/\partial x$, $\Delta F/\Delta y \to \partial F/\partial y$, dostávame vzťah uvedený v pravej časti posledného výrazu, ktorý definuje divergenciu. Operáciu možno v karteziánskej súradnicovej sústave formálne zapísať pomocou NABLA operátora ($\vec{\nabla}$) takto

$$div\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}} = (\vec{\mathbf{u}}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\mathbf{u}}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{\mathbf{u}}_z\frac{\partial}{\partial y})\cdot(\vec{\mathbf{u}}_x F_x+\vec{\mathbf{u}}_y F_y+\vec{\mathbf{u}}_z F_z)$$

Keďže ľubovolný objem može byť "poskladaný" z elementov typu $\Delta v = \Delta x\Delta y\Delta z$, z predposledného výrazu vyplýva rovnosť (GAUSS)

$$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{\mathbf{F}}dv \leftarrow \boxed{\sum_{\text{cez elementy }\Delta v} div\vec{\mathbf{F}}\Delta v}$$

Plocha Σ (možno ju chápať aj ako zjednotenie povrchov Σ_Δ elementárnych buniek) je jednoznačne viazaná s oblasťou (objemom) Ω (zjednotenie objemov elementárnych buniek Ω_Δ) ktorý ohraničuje. Plocha Σ v žiadnom prípade nemôže byť len časťou povrchu (nulový objem!) vždy predstavuje celý povrch nejakého (mysleného, alebo reálneho) telesa. Môže byť zložitejšieho tvaru - pozri obrázok. Pri zjednotení povrchov elementárnych buniek sa na každej stene medzi susednými bunkami započítava ten istý príspevok (k toku) raz s kladným a raz so záporným znamienkom - preto je na nich výsledný príspevok nulový - a relevatný je len povrch celej oblasti Ω.