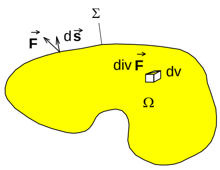
GREENOVA FUNKCIA - princíp zrkadlenia

Výtok (ľubovolného) vektora $\vec{\mathbf{F}}$ cez povrch Σ ohraničujúci objem Ω možno vypočítať ako objemový integrál z jeho divergencie (Gaussova veta)

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{s}} = \iiint_{\Omega} div\vec{\mathbf{F}}dv$$



$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \underbrace{(\vec{\mathbf{F}}_1 - \vec{\mathbf{F}}_2)}_{\vec{\mathbf{F}}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \iiint_{\Omega} \underbrace{(div\vec{\mathbf{F}}_1 - div\vec{\mathbf{F}}_2)}_{div\vec{\mathbf{F}}}dv$$

Majme na mysli dva vektory: $\vec{\mathbf{F}}_1 = \psi\vec{\nabla}\varphi$ a $\vec{\mathbf{F}}_2 = \varphi\vec{\nabla}\psi$, oba konštruované zo skalárnych funkcií φ a ψ, a vypočítajme ich divergenciu - so zámerom následne využiť Gaussovu vetu:

$$div\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \psi\Delta\varphi$$

$$div\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi + \varphi\Delta\psi\ .$$

Keďže $\vec{\nabla}$ - je diferenciálny operátor, postupujeme ako pri derivovaní súčinu a berieme zreteľ na skalárny charakter násobenia. Je zrejmé, že vzhľadom na výsledok rozdielu $div\vec{\mathbf{F}}_1 - div\vec{\mathbf{F}}_2$, platí tzv. Greenova veta (vťahy v rámikoch)

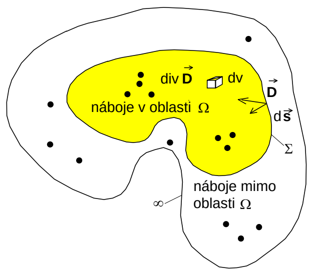
$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\Sigma}(\psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi).d\vec{\mathbf{s}}} = \oint\!\!\oint_{\Sigma}(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})ds = \boxed{\iiint_{\Omega}(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)dv}$$

Pri alternatívnom zápise plošného integrálu sme využili, že vektor plochy $d\vec{\mathbf{s}}$ má vždy smer normály $\vec{\mathbf{n}}$, takže priemet vektora $\vec{\nabla}\varphi$ do jej smeru je $\partial\varphi/\partial n$. Samozrejme aj $\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{\mathbf{s}} = (\partial\psi/\partial n)ds$. V prípade ak ide o riešenie Poissonovej rovnice: $\Delta\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{q_v(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon}$ s daným rozdelením objemovej hustoty voľného náboja $q_v(\vec{\mathbf{r}})$, dôsledok Greenovej vety je zaujímavý, ak za (inak ľubovolnú) funkciu $\psi(\vec{\mathbf{r}})$ - vezmeme riešenie tejže Poissonovej rovnice v prípade jediného bodového náboja *jednotkovej velkosti* umiestneného v $\vec{\mathbf{r}}_0$, a teda ak: $\Delta\psi(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\delta_v(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)}{\varepsilon}$. Po dosadení (orámované časti predchádzajúcej rovnosti), kde (alternatívne) napíšeme $(\partial\varphi/\partial n)ds$ a $(\partial\psi/\partial n)ds$ namiesto $\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ a $\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{\mathbf{s}}$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})ds = -\iiint_{\Omega}\psi(\vec{\mathbf{r}})\frac{q_v(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon}dv + \iiint_{\Omega}\varphi(\vec{\mathbf{r}})\frac{\delta_v(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)}{\varepsilon}dv\ .$$

Ak uvážime známu (integrálnu) vlastnosť $\delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)$ funkcie, máme: $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_0) = \iiint_{\Omega}\psi(\vec{\mathbf{r}})q_v(\vec{\mathbf{r}})dv + \oint\!\!\oint_{\Sigma}\varepsilon(\psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{\mathbf{s}}$.

Riešenie v uzavretej oblasti Ω (v bode $\vec{\mathbf{r}}_0$) poznáme, ak vieme aké je rozloženie nábojov vo vnútri tejto oblasti $q_v(\vec{\mathbf{r}})$ - prvý integrál, potenciálu $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_{\Sigma})$ a jeho derivácie $\partial\varphi/\partial n$ (resp. gradientu $\vec{\nabla}\varphi$), na hranici Σ tejto oblasti - druhý integrál. Dá sa však dokázať, že stačí poznať len ….jednu z nich. DÔKÁZ!?



Funkcia $\psi(\vec{\mathbf{r}})$, ako riešenie rovnice $\Delta\psi(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\delta_v(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)}{\varepsilon}$ (pole jediného bodového náboja $Q_v = 1$, lokalizovaného v mieste $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$) je známa:

$$\psi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0|}$$ - tzv. Greenova funkcia.

V špeciálnom prípade, ak $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_{\Sigma}) = 0$, teda - ak všetky náboje vyvolajú na vodivej hraničnej ploche Σ nulový potenciál, keďže $-\varepsilon\vec{\nabla}\varphi = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{D}}$, a keďže $\vec{\mathbf{D}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = D_n ds = \sigma_v ds$ dostaneme, pri uvážení zmenenej orientácie normály (pozri obrázok) $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_0) = \iiint_{\Omega}\psi(\vec{\mathbf{r}})q_v(\vec{\mathbf{r}})dv + \oint\!\!\oint_{\Sigma}\psi(\vec{\mathbf{r}})\sigma_v(\vec{\mathbf{r}})ds$.

Riešenie úlohy je preto dané buď integráciou vztiahnutou na nábojové hustoty zdrojov: objemové $q_v(\vec{\mathbf{r}})$ - v oblasti Ω, a plošné $\sigma_v(\vec{\mathbf{r}})$ - na jej hranici Σ, $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_0) = \iiint_{\Omega}\dfrac{q_v(\vec{\mathbf{r}})}{4\pi\varepsilon|(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)|}dv + \oint\!\!\oint_{\Sigma}\dfrac{\sigma_v(\vec{\mathbf{r}})}{4\pi\varepsilon|(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)|}ds$, alebo integráciou vztiahnutou len na objemové hustoty $q_v(\vec{\mathbf{r}})$, ale cez celý priestor: $\varphi(\vec{\mathbf{r}}_0) = \iiint_{\infty}\dfrac{q_v(\vec{\mathbf{r}})}{4\pi\varepsilon|(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)|}dv$ - toto je princíp zrkadlenia.