Vodivá guľa vložená do pôvodne homogénneho pola E_0 orientovaného v smeru osi [z], $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0$.

Výsledný potenciál bude daný súčtom potenciálu pôvodného (homogénneho) poľa $\varphi_0 = -E_0 z$, kde ($z = r\cos\vartheta$), a potenciálu φ_G od voľných nábojov rozložených na povrchu vodivej gule ako dôsledok elektrostatickej indukcie. Potenciály φ_0 , φ_G spĺňajú Laplaceovu rovnicu:

$$\Delta\varphi(r,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}) .$$

Vo všeobecnom riešení (nižšie) ako v oblasti 1 ($r > r_0$), tak aj v oblasti 2 ($r < r_0$) treba zvoliť $b_0 = 0$, lebo v strede gule sa nenachádza bodový zdroj. Pri $r \to \infty$ musí potenciál φ_G vymiznúť, v objeme vodivého telesa (oblasť 2) bude výsledný potenciál konštantný – a môžeme ho považovať (zvoliť) za nulový. Vzhľadom na jeho spojitosť na rozhraní ($r = r_0$) bude nielen $a_0 = 0$, ale suma sa redukuje na jediný člen (n =1). Riešenie teda bude nasledovné v okolí vodivej gule ($r > r_0$), oblasť 1:

$$\varphi_{G1}(r,\vartheta) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r_0}{r})^{n+1} a_n P_n(\cos\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{G1} = (\frac{r_0}{r})^2 a_1 \cos\vartheta$$

$$\varphi_1(r,\vartheta) = \varphi_0(r,\vartheta) + \varphi_{G1}(r,\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -E_0 r\cos\vartheta + (\frac{r_0}{r})^2 a_1 \cos\vartheta \neq 0$$

v objeme vodivej gule ($r < r_0$), oblasť 2:

$$\varphi_{G2}(r,\vartheta) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^{n} a_n P_n(\cos\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{G2} = \frac{r}{r_0} a_2 \cos\vartheta$$

$$\varphi_2(r,\vartheta) = \varphi_0(r,\vartheta) + \varphi_{G2}(r,\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{r}{r_0} a_2 \cos\vartheta = 0$$

Takže z podmienky $\varphi_2 = 0$ dostaneme: $a_2 = r_0 E_0$ a preto potom v okolí gule

$$\varphi_1 = -E_0 \left(1 - (\frac{r_0}{r})^3 \right) r\cos\vartheta$$

Intenzitu poľa v oblasti 1 stanovíme ako $\vec{E}_1(r,\vartheta) = -\mathrm{grad}\varphi_1(r,\vartheta) = \vec{\mathbf{u}}_r \dfrac{\partial \varphi_1(r,\vartheta)}{\partial r} + \vec{\mathbf{u}}_\vartheta \dfrac{\partial \varphi_1(r,\vartheta)}{r\,\partial \vartheta}$

$$E_{1r}(r,\vartheta) = -\frac{\partial \varphi_1(r,\vartheta)}{\partial r} = E_0 \cos\vartheta \left[1 + 2(\frac{r_0}{r})^3 \right] = E_{1\text{normálové}}$$

$$E_{1\vartheta}(r,\vartheta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1(r,\vartheta)}{\partial \vartheta} = -E_0 \sin\vartheta \left[1 - (\frac{r_0}{r})^3 \right] = E_{1\text{tangenciálne}}$$

Vo vnútri gule je vzhľadom na nulovú hodnotu intenzity v každom bode $E_{2\text{normálové}} = 0$ aj $E_{2\text{tangenciálne}} = 0$, takže na povrchu vodivej gule (pri $r = r_0$) zaznamenávame spojitosť: $E_{1\text{tangenciálne}} = E_{2\text{tangenciálne}}$, a na druhej strane nespojitosť, ktorá reprezentuje plošnú hustotu rozloženia voľného elektrického náboja na povrchu (vyvolanú elektrostatickou indukciou) $\varepsilon_0 E_{1\text{normálové}} - \varepsilon_0 E_{2\text{normálové}} = D_{1\text{normálové}} - D_{2\text{normálové}} = \sigma_v = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta$. Maximálna hustota náboja je pri $\vartheta = 0$, kladný náboj a pri, $\vartheta = \pi$ záporný náboj, teda v bodoch povrchu a na osi [z].

V miestach $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, teda na istej kružnici je hustota náboja nulová. Pripomíname $z = r\cos\vartheta$.

Dielektrická guľa v pôvodne homogénnom poli E_0 orientovanom do smeru osi [z]. Laplaceova rovnica, jej riešenie a sprievodná diskusia sú také isté ako v predošlom prípade. Tak isto ako predtým, aj tu sa suma vo všeobecnom riešení redukuje na jediný člen (n =1). Riešenie bude

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_{G1} = -E_0 r\cos\vartheta + (\frac{r_0}{r})^2 a_1 \cos\vartheta \neq 0, \quad \text{pri } r > r_0$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_{G2} = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{r}{r_0} a_2 \cos\vartheta \neq 0, \quad \text{pri } r < r_0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = \mathbf{u}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{u}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = E_0\cos\vartheta + 2\frac{r_0^2}{r^3} a_1\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad D_{n1} = \varepsilon_1 E_{1r}\Big|_{r=r_0} = \varepsilon_1\left(E_0 + 2\frac{a_1}{r_0}\right)\cos\vartheta$$

$$E_{1\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta} = -E_0\sin\vartheta + \frac{r_0^2}{r^3} a_1\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad E_{t1} = E_{1\vartheta}\Big|_{r=r_0} = \left(-E_0 + \frac{a_1}{r_0}\right)\sin\vartheta$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = E_0\cos\vartheta - \frac{a_2}{r_0}\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad D_{n2} = \varepsilon_2 E_{2r}\Big|_{r=r_0} = \varepsilon_2\left(E_0 - \frac{a_2}{r_0}\right)\cos\vartheta$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\vartheta} = -E_0\sin\vartheta + \frac{a_2}{r_0}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad E_{t2} = E_{2\vartheta}\Big|_{r=r_0} = \left(-E_0 + \frac{a_2}{r_0}\right)\sin\vartheta$$

$$\left.\begin{aligned} &D_{n1} \equiv D_{n2} \Rightarrow \quad \varepsilon_1\left(E_0 + 2\frac{a_1}{r_0}\right) = \varepsilon_2\left(E_0 - \frac{a_2}{r_0}\right) \\ &E_{t1} \equiv E_{t2} \quad \Rightarrow \quad -E_0 + \frac{a_1}{r_0} = -E_0 + \frac{a_2}{r_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = r_0 E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}$$

$$\varphi_1(r,\vartheta) = -E_0 r\cos\vartheta\left[1 - (\frac{r_0}{r})^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}\right], \quad \text{pri r} > r_0$$

$$\varphi_2(r,\vartheta) = -E_0 r\cos\vartheta\left[\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}\right] = -E_0 z\left[\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}\right], \quad \text{pri } r < r_0$$

Ľahko sa overí že: $\varphi_1(r_0,\vartheta) \equiv \varphi_2(r_0,\vartheta)$. Vo vnútri gule bude pole homogénne $\vec{E}_2 = -grad\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\vec{u}_z = \frac{3E_0\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}\vec{u}_z$. Ak je v okolie dielektrickej gule vákuum ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$) a položíme $E_2 = E_0 + E_{depolarizačné}$, bude tzv. depolarizačné pole $E_d = -\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2} + 2}E_0$ (pripomeňme, že $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}$). V dielektriku: $D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 = \varepsilon_2 E_2$, takže $P_2 = (\varepsilon_{r2} - 1)\varepsilon_0 E_2$. Polarizácia gule bude $P_2 = 3\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2} + 2}\varepsilon_0 E_0$ a po úprave: $E_d = -\frac{1}{3}\frac{P_2}{\varepsilon_0}$. Absolútna hodnota depolarizačného pola (má opačný smer ako pôvodné pole) je teda priamoúmerná polarizácii: $|E_d| = N\frac{P_2}{\varepsilon_0}$, konštanta N, (tu 1/3) sa volá depolarizačný faktor (gule). Depolarizačný faktor nekonečne dlhého valca polarizovaného kolmo na jeho os je 1/2, depolarizačný faktor nekonečne rozľahlej dosky s konečnou hrúbkou, polarizovanej kolmo k jej povrchu je 1 (prečo?).

Magnetická guľa v pôvodne homogénnom poli H_0 orientovanom do smeru osi [z]. Laplaceova rovnica, jej riešenie a sprievodná diskusia sú také isté ako v predošlom prípade. Tak isto ako predtým, aj tu sa suma vo všeobecnom riešení redukuje na jediný člen (n =1). Riešenie bude

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_{G1} = -H_0 r \cos\vartheta + (\frac{r_0}{r})^2 a_1 \cos\vartheta \neq 0, \quad \text{pri } r > r_0$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_{G2} = -H_0 r \cos\vartheta + \frac{r}{r_0} a_2 \cos\vartheta \neq 0, \quad \text{pri } r < r_0$$

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi = \mathbf{\vec{u}}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \mathbf{\vec{u}}_\psi \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$$

$$H_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = H_0 \cos\vartheta + 2\frac{r_0^2}{r^3} a_1 \cos\vartheta \;\Rightarrow\; B_{n1} = \mu_1 H_{1r}\Big|_{r=r_0} = \mu_1\left(H_0 + 2\frac{a_1}{r_0}\right)\cos\vartheta$$

$$H_{1\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = -H_0 \sin\vartheta + \frac{r_0^2}{r^3} a_1 \sin\vartheta \;\Rightarrow\; H_{t1} = H_{1\vartheta}\Big|_{r=r_0} = \left(-H_0 + \frac{a_1}{r_0}\right)\sin\vartheta$$

$$H_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = H_0 \cos\vartheta - \frac{a_2}{r_0}\cos\vartheta \;\Rightarrow\; D_{n2} = \mu_2 H_{2r}\Big|_{r=r_0} = \mu_2\left(H_0 - \frac{a_2}{r_0}\right)\cos\vartheta$$

$$H_{2\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = -H_0 \sin\vartheta + \frac{a_2}{r_0}\sin\vartheta \;\Rightarrow\; H_{t2} = H_{2\vartheta}\Big|_{r=r_0} = \left(-H_0 + \frac{a_2}{r_0}\right)\sin\vartheta$$

$$\left.\begin{aligned} B_{n1} \equiv B_{n2} &\Rightarrow \mu_1\left(H_0 + 2\frac{a_1}{r_0}\right) = \mu_2\left(H_0 - \frac{a_2}{r_0}\right) \\ H_{t1} \equiv H_{t2} &\Rightarrow -H_0 + \frac{a_1}{r_0} = -H_0 + \frac{a_2}{r_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = r_0 H_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}$$

$$\varphi_1(r,\vartheta) = -H_0 r \cos\vartheta\left[1 - (\frac{r_0}{r})^3 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\right], \quad \text{pri r} > r_0$$

$$\varphi_2(r,\vartheta) = -H_0 r \cos\vartheta\left[\frac{3\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\right] = -E_0 z\left[\frac{3\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\right], \quad \text{pri } r < r_0$$

Ľahko sa overí že: $\varphi_1(r_0,\vartheta) \equiv \varphi_2(r_0,\vartheta)$. Vo vnútri gule bude pole homogénne $\vec{H}_2 = -grad\varphi_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\vec{u}_z = \frac{3H_0\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\vec{u}_z$. Ak je v okolie magnetickej gule vákuum ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$) a položíme

$H_2 = H_0 + H_{demagnetizačné}$, bude tzv. demagnetizačné pole $H_d = -\frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2} + 2} H_0$ (pripomeňme, že $\mu_2 = \mu_0\mu_{r2}$). V magnetiku: $B_2 = \mu_0(H_2 + M_2) = \mu_2 H_2$, takže $M_2 = (\mu_{r2} - 1)H_2$.

Magnetizácia gule bude $M_2 = 3\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2} + 2} H_0$ a po úprave: $H_d = -\frac{1}{3}M_2$. Absolútna hodnota demagnetizačného pola (má opačný smer ako pôvodné pole) je teda priamoúmerná magnetizácii: $|H_d| = NM_2$, konštanta N, (tu 1/3) sa volá demagnetizačný faktor (gule). Demagnetizačný faktor nekonečne dlhého valca magnetizovaného kolmo na jeho os je 1/2, demagnetizačný faktor nekonečne rozľahlej dosky s konečnou hrúbkou, magnetizovanej kolmo k jej povrchu je 1 (prečo?).