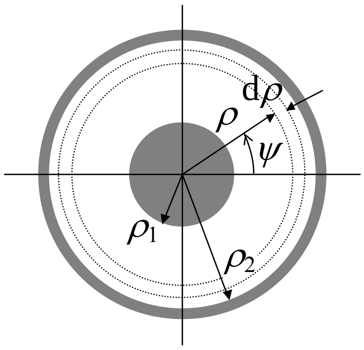
Vypočítajte vlastnú indukčnosť nekonečne dlhého koaxiálneho kábla na jednotku dĺžky
Návod: Vychádzajte z energetickej definície.

$w=\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}=\frac{\mu}{2}H^2,\quad W=\iiint_{\Omega} w\mathrm{d}v=\frac{1}{2}LI^2$	$\oint_{\Gamma}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=I_{\Sigma},\quad H2\pi\rho=I$

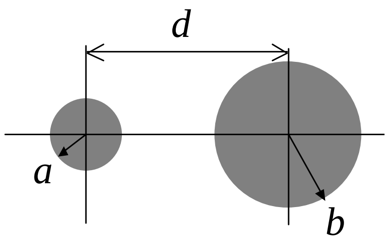


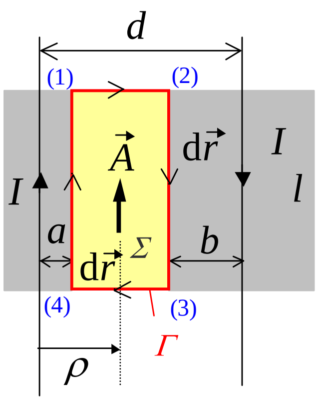
$$w=\frac{\mu}{2}H^2=\frac{\mu I^2}{8(\pi\rho)^2},\quad \mathrm{d}v=(\mathrm{d}z)(\rho\mathrm{d}\psi)(\mathrm{d}\rho)\to\mathrm{d}v=l\rho 2\pi\mathrm{d}\rho$$

$$\frac{L}{l}=\frac{2W}{I^2 l}=\frac{\mu}{l}\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{4(\pi\rho)^2}=\frac{\mu}{2\pi}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Vypočítajte vlastnú indukčnosť nekonečne dlhého dvojvodičového vedania s nerovnakým priemerom vodičov na jednotku dĺžky (tzv. vnútornú indukčnosť zanedbajte)
Návod: Vychádzajte z viazaného magnetického toku a vektorového potenciálu nekonečne dlhého vodiča.

$L=\frac{\Phi}{I},\quad \Phi=\iint_{\Sigma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\oint_{\Gamma}\vec{A}\mathrm{d}\vec{r}$	$\vec{A}=\vec{u}_I\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{k}{\rho},\quad A=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{k}{\rho}$





Zvolíme konštantu $k\equiv d-b$, takže na časti integračnej dráhy (2)-(3), pri $\rho=d-b$, je vektorový potenciál nula, potom:

$$\Phi=\oint_{\Gamma}\vec{A}\mathrm{d}\vec{r}=\int_{(1)}^{(2)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{(2)}^{(3)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{(3)}^{(4)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{(4)}^{(1)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int_{(1)}^{(2)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{(3)}^{(4)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0,\ \vec{A}\perp\mathrm{d}\vec{r},\quad \int_{(2)}^{(3)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0,\ A\equiv 0\Big|_{\rho=d-b}$$

$$\Phi=\int_{(4)}^{(1)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=Al=l\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{d-b}{a}$$

lebo na časti integračnej dráhy (4)-(1), pri $\rho=a$, je vektorový potenciál konštantný.

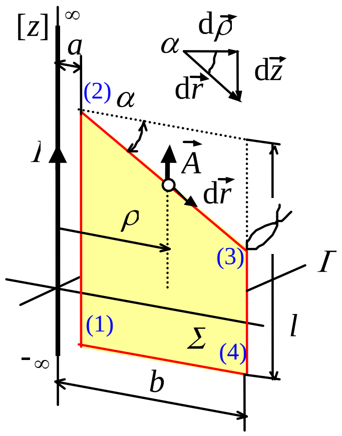
Vlastná indukčnosť na jednotku dĺžky je $\frac{L}{l}=\frac{\Phi}{Il}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{d-b}{a}$

Pri $a=b$, a za podmienky: $a\ b \ll d$, máme $\frac{L}{l}\doteq\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{d}{a}$.

Prečo nie je dobý nápad aj tu vychádzdať z energetickej definície?
Skúste vypočítať viazaný magnetický tok aj zo vzťahu $\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečne dlhého vodiča a závitu (farebne) vyznačeného tvaru.
Návod namiesto integrácie husoty magnetického toku (B) cez plochu Σ, vypočítajte cirkuláciu vektorového potenciálu (A). Interujte pozdĺž dráhy Γ, t.j. (1)-(2)-(3)-(4)-(1).

$\vec{A}(\rho) = \vec{u}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln\frac{b}{\rho} + konšt.$ (tu: $konšt. = 0$)	$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{u}_\rho \mathrm{d}\rho - \vec{u}_z \mathrm{dz} = \left(\vec{u}_\rho - \vec{u}_z \mathrm{tg}\alpha\right)\mathrm{d}\rho = = \left(\vec{u}_\rho \mathrm{cotg}\alpha - \vec{u}_z\right)\mathrm{dz} = \left(\vec{u}_\rho \cos\alpha - \vec{u}_z \sin\alpha\right)\mathrm{dr}$



$$M = \frac{\Phi}{I}, \text{ kde: } \Phi = \iint_\Sigma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_{(1)}^{(2)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_{(2)}^{(3)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_{(3)}^{(4)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + + \int_{(4)}^{(1)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = l\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}, \text{ kde: } \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{z}$$

$$\int_{(2)}^{(3)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mu I}{2\pi}\int_{(2)}^{(3)} \vec{u}_z \ln\frac{b}{\rho}\cdot\left(\vec{u}_\rho - \vec{u}_z tg\alpha\right)\mathrm{d}\rho = \ldots$$

$$\int_{(3)}^{(4)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0, \text{ kde: } \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}\vec{z},\ A \equiv 0\big|_{\rho=b}$$

$$\int_{(4)}^{(1)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0, \text{ kde: } \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}\vec{\rho},\ \vec{A}\perp\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\ldots = -\frac{\mu I}{2\pi} tg\alpha \int_{(2)}^{(3)} \ln\frac{b}{\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I}{2\pi} tg\alpha \int_{(2)}^{(3)} \ln\underbrace{\frac{\rho}{b}}_{\xi}\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I b}{2\pi} tg\alpha \int_{a/b}^{b/b} \ln\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{\mu I b}{2\pi} tg\alpha\left[\xi\ln(\xi) - \xi\right]_{a/b}^{1} = -\frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{tg}\alpha\left[b - a - a\ln(\frac{b}{a})\right]$$

$$\Phi = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_{(2)}^{(3)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = l\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} - \frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{tg}\alpha\left[b - a - a\ln(\frac{b}{a})\right] =$$

$$= l\frac{\mu I}{2\pi}\left[\ln\frac{b}{a} - \frac{b-a}{l}\mathrm{tg}\alpha + \frac{a}{l}\mathrm{tg}\alpha\ln(\frac{b}{a})\right] = l\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\left(1 + \frac{a}{l}\mathrm{tg}\alpha\right)\ln\frac{b}{a} - \mathrm{tg}\alpha\frac{b-a}{l}\right\}$$

Špecialne, pre tojuholníkový zavit t.j. ak splynú body (3) a (4), $\mathrm{tg}\alpha = \frac{l}{b-a}$, máme:

$\Phi_\Delta = l\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{b}{b-a}\ln\frac{b}{a} - 1\right\}$, pokým pri obdĺžnikovom závite ($\mathrm{tg}\alpha = 0$), je $\Phi_0 = l\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{b}{a}\right\}$, čo vedie

k rozdielu $\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi_\Delta = l\frac{\mu I}{2\pi}\left\{1 - \frac{a}{b-a}\ln\frac{b}{a}\right\}$ predstavujúcemu magnetický tok cez farebne nevyznačený

trojuholník v pôvodnom obrazku. Vzajomná indukčnosť nekonečne dlhého vodiča a závitu podľa obrázku

teda je $M = l\frac{\mu}{2\pi}\left\{\left(1 + \frac{a}{l}\mathrm{tg}\alpha\right)\ln\frac{b}{a} - \mathrm{tg}\alpha\frac{b-a}{l}\right\}$.

Skúste