VIII. HARMONICKÉ ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

VIII.1. FÁZORY-VEKTORY

• Komplexná reprezentácia vektorov harmonického poľa $\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{D}},\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{H}}$ • Eliptická, kruhová a lineárna polarizácia

VIII.2. FÁZOROVÉ-VEKTOROVÉ ROVNICE

Maxwellove rovnice a vlnové rovnice v komplexnom tvare • Konštanta šírenia a charakteristická impedancia prostredia

VIII.3. POYNTINGOV FÁZOR-VEKTOR

Poyntingov fázor - vektor harmonického poľa •Rezonančný stav elektromagnetického poľa

VIII.4. KOMPLEXNÁ PERMITIVITA A PERMEABILITA

Komplexná permitivita a permeabilita $\tilde{\varepsilon},\tilde{\mu}$ pri harmonickom priebehu veličín • Komplexná reprezentácia $\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{D}},\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{H}}$ a vzťahy medzi reálnymi vektormi $\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}$ pri neharmonickom časovom priebehu

.

V nasledujúcom texte budeme dôsledne používať explicitné označovanie časovo- priestorových veličín (aj keď v principe vždy je správny aj stručnejší, implicitný zápis):
• reálnych vektorov intenzity a hustoty toku elektrického aj magnetického poľa
$\vec{E}(\vec{r},t)\equiv\vec{E},\quad \vec{H}(\vec{r},t)\equiv\vec{H},\quad \vec{D}(\vec{r},t)\equiv\vec{D},\quad \vec{B}(\vec{r},t)\equiv\vec{B}$
• reálneho skalárneho a vektorového potenciálu aj reálnych Hetzových vektorov
$\varphi(\vec{r},t)\equiv\varphi,\quad \vec{A}(\vec{r},t)\equiv\vec{A},\quad \vec{\Pi}(\vec{r},t)\equiv\vec{\Pi}$
V prípade tu zavedených komplexných veličín, vzhľadom na ich separovanú priestorovu a časovú závislosť typu: $\mathcal{F}(\vec{r},t)=\mathcal{F}(\vec{r})e^{j\omega t}$, $\mathcal{F}(\vec{r},0)=\mathcal{F}(\vec{r})$, $\mathcal{F}(0,t)=\mathcal{F}(0)e^{j\omega t}$ by ich stručnejší (implicitný) zápis nebol jednoznačný. Naviac, pri prípustnej stručnej anotácii realnych veličín $\vec{F}(\vec{r},t)\equiv\vec{F}$, by sa v zápise rovníc stratila korešpondencia:

$$F(\vec{r},t)\quad\leftrightarrow\quad\mathcal{F}(\vec{r},t)=\mathcal{F}(\vec{r})e^{j\omega t}$$
$$F(\vec{r},0)\quad\leftrightarrow\quad\mathcal{F}(\vec{r}),\ \ F(0,t),\quad\leftrightarrow\quad\mathcal{F}(0)e^{j\omega t},\quad F(0,0)\quad\leftrightarrow\quad\mathcal{F}(0)$$

VIII.1. FÁZORY-VEKTORY

Komplexná reprezentácia vektorov harmonického poľa

Prostredie vyplnené homogénnou a izotrópnou látkou, alebo vákuom – v ktorom možno považovať ε, μ a κ za konštanty, nazývame lineárnym. Ak sa v takomto prostredí nenachádzajú voľné elektrické náboje q_v a netečú v ňom vonkajšími (nezávislými) zdrojmi vnútené prúdy J_0, Maxwellove rovnice (pozri VII(1.11) a VII(1.12)) nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r},t) = k\vec{E}(\vec{r},t) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad &\mathrm{div}\, \vec{H}(\vec{r},t) = 0 \\ &\mathrm{rot}\, \vec{E}(\vec{r},t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad &\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.1)}$$

Každá z funkcií: $\vec{E}(\vec{r},t)$ i $\vec{H}(\vec{r},t)$ má teda predpísanú rotáciu a (nulovú) divergenciu. Ak vypočítame $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r},t)$ a $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{E}(\vec{r},t)$, a podobne, ako sme to urobili so vzťahmi VII(1.8) a VII(1.9), po vzájomnom dosadení za $\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r},t)$ a $\mathrm{rot}\, \vec{E}(\vec{r},t)$, môžeme separovať rovnice pre funkcie $\vec{E}(\vec{r},t)$ a $\vec{H}(\vec{r},t)$ .Vďaka nulovým divergenciám, dostaneme (podobne ako v prípade VII(1.10)) vlnové rovnice:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H}(\vec{r},t) - \kappa\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.2)}$$

ktoré sa v bezstratovom prostredí (□ = 0) zjednodušia na:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \equiv \Box \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \\ \nabla^2 \vec{H}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \equiv \Box \vec{H}(\vec{r},t) = 0 \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.3)}$$

Pri zápise sme alternatívne použili (d' Alembertov) operátor podľa VII(3.17). Ak je charakter časových zmien taký, že v každom okamihu a v každom mieste je $\kappa\vec{E}(\vec{r},t) >> \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$, (ako uvidíme, taký stav je možný aj pri nižších frekvenciách ale vo veľmi dobre vodivom prostredí, alebo v málo vodivom prostredí ale pri veľmi vysokých frekvenciách) hovoríme o kvazistacionarnom poli. V takom prípade nadobudnú rovnice VIII(1.2) tvar

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H}(\vec{r},t) - \kappa\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.4)}$$

Ak VIII(1.3) sú typické "vlnové" rovnice, tak rovnice VIII(1.4) majú typický charakter tzv. "difúznych" rovníc, pozri D(3.06).
Časové zmeny veličín poľa opísaného rovnicami VIII(1.2) resp. ich variantami VIII(1.3) a VIII(1.4) môžu mať nespočetne mnoho podôb. Pri vyšetrovaní obvodov so sústredenými parametrami sme okrem ustálených (periódických) priebehov prišli do styku aj so všeobecnejšími typmi signálov a všeobecnejšími metódami riešenia (ako je napríklad Fourierovská spektrálna analýza). Pri obvodoch s rozloženými parametrami (homogénne vedenia) sme okrem harmonických priebehov vyšetrovali len niektoré prípady prechodných javov. Úlohy podobného charakteru sú aktuálne aj v elektromagnetickom poli, a metódy na ich riešenie sú veľmi podobné (niekedy doslova rovnaké) ako metódy, ktoré sme poznali v teorii obvodov. Teraz sa však

obmedzíme len na prípady, ktoré aj predtým tvorili základ na ktorom sme budovali ďalej. Budeme sa zaoberať len ustálenými harmonickými priebehmi veličín. Ostaňme ešte chvíľu pri súvislostiach, a hoci to bude zdôraznené aj na inom mieste, upozorníme už tu na podobnosť rovníc typu VIII(1.2) s vlnovými rovnicami homogénneho vedenia, a to nielen formálnu.
Máme dve rovnice, pre $\vec{E}(\vec{r},t)$ -rozmer (V/m) a pre $\vec{H}(\vec{r},t)$ -rozmer (A/m), ktoré nie sú navzájom nezávislé, $\vec{E}(\vec{r},t)$ a $\vec{H}(\vec{r},t)$ sú viazané Maxwellovými rovnicami. Pole závisí od času aj od polohy v priestore (čo je tu symbolicky zapísané pomocou premennej $\vec{r}$), prostredie je lineárne, charkterizované konštantami k,ε,μ. Rýchlosť šírenia vĺn je $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.
Na homogénnom vedení boli tiež dve rovnice, jedna pre $u(x,t)$ -rozmer (V), druhá pre $i(x,t)$ -rozmer (A), a tiež boli navzájom viazané (Kirchhoffovými zákonmi) a napätie a prúd záviseli od času a vzdialenosti od začiatku (či konca) vedenia. Obvod bol lieárny, charakterizovaný konštantami R_0,G_0,C_0,L_0 , a rýchlosť šírenia vĺn bola $v=1/\sqrt{C_0L_0}=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.
Pri vyšetrovaní pomerov na vedení sme pri harmonických zdrojoch, a odtiaľ, vďaka linearite systému aj harmonických priebehoch vynútených prúdov a napätí, s istou výhodou využívali ich komplexnú reprezentáciu (*rotujúe fazory*) $\mathcal{U}(x,t)=\mathcal{U}(x)e^{j\omega t}$ a $\mathcal{I}(x,t)=\mathcal{I}(x)e^{j\omega t}$. Niečo podobné hodláme urobiť aj teraz, v elektromagnetickom poli. Najprv sa však musíme vysporiadať s istou komplikáciou, ktorá je v tom, že veličiny poľa $\vec{E}(\vec{r},t)$ a $\vec{H}(\vec{r},t)$ -sú vektory. Naša otázka preto znie: Čo treba rozumiet pod harmonicky sa meniacim vektorom ? V najjednoduchšom prípade iste niečo ako

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &\equiv \vec{u}_E E(\vec{r},t)=\vec{u}_E E_m(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_E(\vec{r})\right)\\ \vec{H}(\vec{r},t) &\equiv \vec{u}_H H(\vec{r},t)=\vec{u}_H H_m(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_H(\vec{r})\right)\end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.5)}$$

kde $\vec{u}_E$ resp. $\vec{u}_H$ sú jednotkové vektory, udávajúce smer vektorov $\vec{E}$ resp. $\vec{H}$ v priestore. Analogicky, ako sme to urobili v obvodoch, so sústredenými parametrami, alebo aj na homogénnom vedení, môžeme zaviesť:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &\equiv \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\right\}, \qquad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{u}_E E_m(\vec{r})e^{j\varphi_E(\vec{r})}\\ \vec{H}(\vec{r},t) &\equiv \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)\right\}, \qquad \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)=\vec{u}_H H_m(\vec{r})e^{j\varphi_H(\vec{r})}\end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.6)}$$

Skalárne funkcie: $\vec{E}(\vec{r},t)$ resp. $\vec{H}(\vec{r},t)$, ktoré v VIII(1.5) reprezentujú veľkosť vektorov $\vec{E}$ resp. $\vec{H}$, sme nahradili komplexnými funkciami - rotujúcimi fázormi:

$$\begin{aligned}E(\vec{r},t)=E_m(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_E(\vec{r})\right), &\;\leftrightarrow\; \mathcal{E}(\vec{r},t)=\underbrace{E_m(\vec{r})e^{j\varphi_E(\vec{r})}}_{\mathcal{E}(\vec{r},0)}e^{j\omega t}=\mathcal{E}(\vec{r},0)e^{j\omega t}\\ H(\vec{r},t)=H_m(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_H(\vec{r})\right), &\;\leftrightarrow\; \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)=\underbrace{H_m(\vec{r})e^{j\varphi_H(\vec{r})}}_{\mathcal{H}(\vec{r},0)}e^{j\omega t}=\mathcal{H}(\vec{r},0)e^{j\omega t}\end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.7)}$$

Vytvorenie zložitejšieho matematického objektu $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},0)$ resp. $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},0)$, môžeme ho nazvať: *fazor-vektor*, je v tomto prípade po formálnej stránke jednoduché: fázor $\mathcal{E}(\vec{r},0)$, "násobíme" jednotkovým vektorom $\vec{u}_E$. Pochopiteľne, tak isto urobíme s každým iným fázorom, ktorý budeme pri riešení potrebovať. A tak isto to môžeme urobiť aj s rotujúcimi fázormi:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},0)e^{j\omega t}=\vec{u}_E\mathcal{E}(\vec{r})e^{j\omega t}, \qquad \mathcal{E}(\vec{r},0)\;\equiv\;\mathcal{E}(\vec{r})\\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) &= \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},0)e^{j\omega t}=\vec{u}_H\mathcal{H}(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \mathcal{H}(\vec{r},0)\;\equiv\;\mathcal{H}(\vec{r})\end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.8)}$$

ak dosadíme $t=0$, dostaneme vzťahy pre „obyčajne“ fázory, tak to bolo aj v teórii obvodov. Pre stručnosť zápisu sme vyššie alternatívne vynechali nulu, urobíme to len tam, kde to nevedie k nedorozumeniu. Všimneme si, že veľkosť (t.j. absoluitná hodnota) fázora $|\mathcal{E}(\vec{r})|=E_m$, $|\mathcal{H}(\vec{r})|=H_m$, je totožná s *amplitúdou* priebehu (v tomto prípade intenzity E resp. H). V teórii poľa nie je zvykom narábať s efektívnymi hodnotami (ako sa to niekedy robí v teórii obvodov).
A toto, bol ten najjednoduchší prípad, čo bude potom ďalej ? Nič mimoriadne, každý vektor môže mať najviac tri zložky, a my s každou urobíme to isté. Dokonca sa ukáže, že vždy vystačíme len s dvoma zložkami vektorov poľa. To je všetko. Pod pojem harmonicke pole zahŕňame vo všeobecnosti časovo-priestorovú závislosť vektorov typu:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\begin{Bmatrix} \vec{u}_x E_{xm}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Ex}(\vec{r})\right)+ \\ \vec{u}_y E_{ym}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Ey}(\vec{r})\right)+ \\ \vec{u}_z E_{zm}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Ez}(\vec{r})\right) \end{Bmatrix} \qquad \vec{H}(\vec{r},t)=\begin{Bmatrix} \vec{u}_x H_{xm}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Hx}(\vec{r})\right)+ \\ \vec{u}_y H_{ym}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Hy}(\vec{r})\right)+ \\ \vec{u}_z H_{zm}(\vec{r})\cos\left(\omega t+\varphi_{Hz}(\vec{r})\right) \end{Bmatrix} \qquad \text{VIII.(1.9)}$$

podľa ktorej, jednotlivé zložky vektorov v karteziánskej súradnicovej sústave sú v čase *harmonické* funkcie. Podľa toho, VIII(1.5) je len špeciálným prípadom VIII(1.9), v ktorom sú rovnaké fázy:

$$\varphi_E(\vec{r})=\varphi_{Ex}(\vec{r})=\varphi_{Ey}(\vec{r})=\varphi_{Ez}(\vec{r})$$
$$\varphi_H(\vec{r})=\varphi_{Hx}(\vec{r})=\varphi_{Hy}(\vec{r})=\varphi_{Hz}(\vec{r})$$

a zrejme:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{u}_E E(\vec{r},t)=\vec{u}_x E_{xm}(\vec{r})+\vec{u}_y E_{ym}(\vec{r})+\vec{u}_z E_{zm}(\vec{r})$$
$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{u}_H H(\vec{r},t)=\vec{u}_x H_{xm}(\vec{r})+\vec{u}_y H_{ym}(\vec{r})+\vec{u}_z H_{zm}(\vec{r})$$

Komplexná reprezentácia reálnych veličín podľa VIII(1.9) je formálne zhodná s VIII(1.8), ale teraz (napríklad pre intenzitu elektrického poľa): nadobudne rotujúci *fázor-vektor* (niekedy nazývaný jednoducho rotujúci *komplexný vektor*) tvar:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}_x(\vec{r},t)+\vec{\mathcal{E}}_y(\vec{r},t)+\vec{\mathcal{E}}_z(\vec{r},t)=\vec{u}_x\mathcal{E}_x(\vec{r},t)+\vec{u}_y\mathcal{E}_y(\vec{r},t)+\vec{u}_z\mathcal{E}_z(\vec{r},t)= \\ &\left\{\vec{u}_x E_{xm}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ex}(\vec{r})}+\vec{u}_Y E_{Ym}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ey}(\vec{r})}+\vec{u}_z E_{zm}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ez}(\vec{r})}\right\}e^{j\omega t} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.10)}$$

Pri $t=0$, samozrejme, fázor-vektor podľa VIII(1.10) môžeme napísať:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_x(\vec{r})+\vec{\mathcal{E}}_y(\vec{r})+\vec{\mathcal{E}}_z(\vec{r})=\vec{u}_x\mathcal{E}_x(\vec{r})+\vec{u}_y\mathcal{E}_y(\vec{r})+\vec{u}_z\mathcal{E}_z(\vec{r})= \\ &=\vec{u}_x E_{xm}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ex}(\vec{r})}+\vec{u}_Y E_{Ym}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ey}(\vec{r})}+\vec{u}_z E_{zm}(\vec{r})e^{j\varphi_{Ez}(\vec{r})} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.11)}$$

Vynechajme teraz, kvôli stručnosti, symbol priestorovej závislosti na súradniciach x,y,z t.j. $\vec{r}$, a píšme:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_x+\vec{\mathcal{E}}_y+\vec{\mathcal{E}}_z=\vec{u}_x\mathcal{E}_x+\vec{u}_y\mathcal{E}_y+\vec{u}_z\mathcal{E}_z=\vec{u}_x E_{xm}e^{j\varphi_{Ex}}+\vec{u}_y E_{Ym}e^{j\varphi_{Ey}}+\vec{u}_z E_{zm}e^{j\varphi_{Ez}}= \\ &=\begin{Bmatrix} \vec{u}_x E_{xm}\left(\cos\varphi_{Ex}+j\sin\varphi_{Ex}\right) \\ \vec{u}_y E_{ym}\left(\cos\varphi_{Ey}+j\sin\varphi_{Ey}\right) \\ \vec{u}_z E_{zm}\left(\cos\varphi_{Ez}+j\sin\varphi_{Ez}\right) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \vec{u}_x\left(E_{Rx}+jE_{Ix}\right) \\ \vec{u}_y\left(E_{Ry}+jE_{Iy}\right) \\ \vec{u}_z\left(E_{Rz}+jE_{Iz}\right) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \left(\vec{u}_x E_{Rx}+\vec{u}_y E_{Ry}+\vec{u}_z E_{Rz}\right)+ \\ j\left(\vec{u}_x E_{Ix}+\vec{u}_y E_{Iy}+\vec{u}_z E_{Iz}\right) \end{Bmatrix}= \\ &\vec{u}_R E_R+j\vec{u}_I E_I=\vec{E}_R+j\vec{E}_I=\vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.12)}$$

zrejme sme vyššie použili označenia: $E_{Rx}=E_{xm}\cos\varphi_{Ex}$, $E_{Ix}=E_{xm}\sin\varphi_{Ex}$ atď a tiež:

$$\begin{aligned} \vec{E}_R&=\vec{u}_R E_R=\vec{u}_x E_{Rx}+\vec{u}_y E_{Ry}+\vec{u}_z E_{Rz} \\ \vec{E}_I&=\vec{u}_I E_I=\vec{u}_x E_{Ix}+\vec{u}_y E_{Iy}+\vec{u}_z E_{Iz} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.13)}$$

pričom sa ľahko overí (porovnaj VIII(1.9)) že je: $\vec{E}_R\equiv\vec{E}_R(\vec{r},t)\big|_{t=0}$ a $\vec{E}_I\equiv\vec{E}_I(\vec{r},t)\Big|_{t=-\frac{T}{4}}$.

Pravdaže, namiesto $t=0$ môžeme vziať $t=nT$ a namiesto $t=-\dfrac{T}{4}$ podobne, $t=-\dfrac{T}{4}+nT$, kde: $t=\ldots-2,-1,0,1,2\ldots$.

To, čo sme nazvali *fazor-vektor* , lebo to bol vektor (pozri prvý riadok VIII(1.12) ktorého zložky sú fázory $\mathcal{E}_x,\mathcal{E}_y,\mathcal{E}_z$, mohli by sme rovnako dobre nazvať aj *vektor-fazor* (pozri poslený riadok VIII(1.12)), keďže je to fázor ktorého zložkami sú (dva reálne) vektory $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$. Dva odlišné pohľady na tú istú vec. Nepokúšajte sa pedstaviť si *vektor-fazor* ani *fazor-vektor*. Nepotrebujete vedieť ako vyzerajú. Čo potrebujete vedieť, je, ako s nimi narábať. A tu je odpoveď jeddnoduchá. Všetky operácie, ktoré sú definované s komplexnými číslami a všetky operácie, ktoré sú definované s vektormi - sú dovolené. Vďaka linearite týchto matematických objektov vzhľadom na ich zložky (pozri VIII(1.12)), možno poradie operácií podľa potreby ľubovoľne meniť. Vektory môžeme znázorniť (napr. v axonometrickom pohľade) v priestore, fázory sa dajú vždy nakresliť v komplexnej (Gaussovej) rovine. *Fázor-vektor* ani *vektor-fázor* nekreslite ! To sa jednoducho nedá. A možno je priliehavejší aj názov ***komplexný vektor*.**

Eliptická, kruhová a linearna polarizácia

Vrátime sa k výrazom VIII(1.6), do ktorých dosadíme v súlade s VIII(1.12) $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_R + j\vec{E}_I$ resp. $\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}_R + j\vec{H}_I$, takže bude:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &\equiv \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{E}_R + j\vec{E}_I\right)e^{j\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{E}_R + j\vec{E}_I\right)\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)\right\} \\ \vec{H}(\vec{r},t) &\equiv \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{H}_R + j\vec{H}_I\right)e^{j\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{H}_R + j\vec{H}_I\right)\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)\right\} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(1.15)}$$

A teraz sme pri koreni veci. Reálne vektory $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ resp. $\vec{H}_R$ a $\vec{H}_I$ určujú dve roviny, každá z uvedených dvojíc inú. Vektor "výsledného" poľa $\vec{E}(\vec{r},t)$ podľa VIII(1.15) v každom okamihu zotrváva v rovine určenej vektormi $\vec{E}_R$, $\vec{E}_I$. Koncový bod vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$ opisuje teda v danej rovine uzavretú krivku, lebo priebeh je periódický (s periódou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$). Ak vyberieme v nejakom bode ($\vec{r}$) karteziánsku súradnicovú sústavu tak, aby jedna z jej osí bola kolmá na túto rovinu, bude mať vektor $\vec{E}(\vec{r},t)$ len dve, navzájom kolmé zložky. To isté sa dá povedať o vektore $\vec{H}(\vec{r},t)$. Pravdaže, v každom z bodov priestoru, môže vo všeobecnosti byť táto rovina inak orientovaná. Predstavte si to hoci tak, že v každom bode priestoru je iným smerom natočený "ciferník" imaginárnych (pomyselných) hodín a na každom ciferníku je jedna ručička - vektor $\vec{E}$. Táto ručička, okrem toho že rotuje, mení aj svoju dĺžku, všetko podľa vzťahu VIII(1.14). Nech koncový bod ručičky vykresľuje okraje ciferníka. Rozoberme dve otázky. Po prvé, ako môže vyzerať jeden takýto ciferník a po druhé, ako môžu byť vzájomne natočené, a nakoľko môžu byť navzájom podobné ciferníky v rozličných bodoch priestoru. Inými slovami, zaujímame sa o to, akú krivku opisuje koncový bod vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$ v jednom mieste, a ako sa táto krivka líši od tých, ktoré opisujú koncové body vektora v iných (susedných) bodoch priestoru. Začnime druhou otázkou. Vo všeobecnosti treba očakávať variabilitu orientácie ale aj tvaru týchto kriviek. Určite tu bude (prinajmenšom akademicky) zaujímavý prípad, keď vo všetkých bodoch nejakej roviny ciferníky sú rovnako natočené a všetky majú rovnaký tvar. Vlnový proces, pri ktorom existujú (navzájom rovnobežné) roviny, v ktorých v každom jednom ich bode, (t.j.vo všetkých bodoch jednej z rovín) je krivka opisovaná koncovým bodom vektora $\vec{E}$ rovnaká a pritom vektor $\vec{E}$, pri rotácii zotrváva v rovine a má tu len dve navzájom kolmé zložky, nazýva sa rovinná vlna. Tymto typom vlnenia sa budeme podrobne zaoberať na inom mieste. Čo sa týka prvej z otázok, tá vyžaduje podrobnejší rozbor. Aby sme sa tu rýchlejšie dopracovali k cieľu, predpokladáme najprv, že $\vec{E}_R \parallel \vec{E}_I$ || E alebo, že $-\vec{E}_R \parallel \vec{E}_I$ (vektory sú kolineárne) alebo, že jeden z vektorov je nulový. Potom výsledný vektor harmonicky nerotuje, ale pulzuje v danom smere a priamo z VIII(1.15) vyplýva, že jeho veľkosť, čo je samozrejme skalárna veličina, mení sa v čase podľa vzťahu:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_R\cos\omega t \pm E_I\sin\omega t = E_m\cos(\omega t \pm \varphi_E)$$

pričom $E_m = \sqrt{E_R^2 + E_I^2}$ a $\varphi_E = arctg\,\dfrac{E_I}{E_R}$. Maximálna hodnota, ktorú intenzita počas periódy nadobúda, je $E_{\max} = E_{\mathrm{m}}$. Hovoríme, že vlna je linearne polarizovana. Tento typ vlny (ako najjednoduchší prípad) bol popísaný aj rovnicami VIII(1.5). Keď sú vektory $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ navzájom kolmé, ($\vec{E}_R \perp \vec{E}_I$) a súčasne majú rovnaké absolutné hodnoty, $\left|\vec{E}_R\right| = \left|\vec{E}_I\right| = E_0$, takže podľa VIII(1.15) je:

$$\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2 = E_R^2\cos^2\omega t + E_I^2\sin^2\omega t = E_R^2 + E_I^2 = 2E_0^2$$

koncový bod vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$ v rovine určenej vektormi $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ opisuje kružnicu a hovoríme, že vlnenie je kruhovo polarizovane. Pritom $\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right| \equiv E_{\max} \equiv E_0 \equiv E_R \equiv E_I < E_m = \sqrt{E_R^2 + E_I^2}$. Veľkosť intenzity poľa je v čase konštantná, mení sa len smer jej vektora. Ešte uvidíme, že takéto vlnenie vo viacerých ohľadoch pripomína stacionárne pole. Vo všetkých ostatných prípadoch vzťahov medzi vektormi $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ je vlnenie elipticky polarizované. To znamená, že koncový bod vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$ opisuje elipsu. Môžete byť zvedaví, ako sme na to prišli. Odpoveď môže byť jednoducho aj tá, že vzťahy VIII(1.15) sú rovnicami elipsy - vo vektorovom tvare. Vy ale asi poznáte rovnicu elipsy v inom tvare. Pripustime, že vektory $\vec{E}_R \perp \vec{E}_I$ sú navzájom kolmé, ale majú rôznu veľkosť. Potom sú E_R a E_I práve hlavná a vedlajšia poloos elipsy. Takú skúsenosť už máme. Ak sa dve, v rovine navzájom kolmé zložky vektora menia harmonicky, jeho koncový bod opisuje elipsu. Spomente si na Lissajousove obrazce, ktoré ste už určite pozorovali na obrazovke osciloskopu – pri rovnakej frekvencii oboch signálov (samozrejme). Vektory $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ môžeme na takéto zložky vždy rozložiť. Nech $[\xi]$ a $[\eta]$ sú dve navzájom kolmé osi pomocnej súradnicovej sústavy, potom v ľubovoľnom bode ($\vec{r}$) je: $\vec{E}_R = \vec{u}_\xi E_{R\xi} + \vec{u}_\eta E_{R\eta}$ a $\vec{E}_I = \vec{u}_\xi E_{I\xi} + \vec{u}_\eta E_{I\eta}$ a namiesto prvého riadku v VIII(1.15) dostaneme (kvôli stručnosti vynechávame symbol $\vec{r}$):

$$\vec{E}(t) = \vec{u}_\xi E_{\xi 0}\cos(\omega t + \varphi_\xi) + \vec{u}_\eta E_{\eta 0}\cos(\omega t + \varphi_\eta) \qquad \text{VIII.(*)}$$

kde $E_{\xi 0} = \sqrt{E_{R\xi}^2 + E_{I\xi}^2}$, $E_{\eta 0} = \sqrt{E_{R\eta}^2 + E_{I\eta}^2}$. Keď nakoniec použijeme substitúciu: $\omega t' = \omega t + \varphi_\xi$, ktorá mení len výber okamihu kedy chceme považovať čas za nulový, bude

$$\vec{E}(t') = \vec{u}_\xi E_{\xi 0}\cos(\omega t') + \vec{u}_\eta E_{\eta 0}\cos(\omega t' + \varphi_\eta - \varphi_\xi)$$

V poslednom výraze sa menia v čase harmonicky dve navzájom kolmé zložky, a čiara, ktorú v rovine $[\xi,\eta]$ opisuje koniec vektora $\vec{E}$, závisí od vzájomného pomeru $E_{\xi 0} / E_{\eta 0}$ a fázového rozdielu $\Delta\varphi = \varphi_\eta - \varphi_\xi$. Pri $\Delta\varphi = 0$, sa pohybuje koncový bod vektora $\vec{E}$ po úsečke a vlnenie je lineárne polarizované. Teraz treba ukázať, že ak $\Delta\varphi \neq 0$, opisuje vektor elipsu. Rozklad vektorov $\vec{E}_R$ a $\vec{E}_I$ do smeru pomocných osí $[\xi]$ a $[\eta]$ pri ich vhodnej orientácii možno vždy urobiť tak, aby $\Delta\varphi = -\pi / 2$. Potom (symbol t' zameníme za t) platí:

$$\vec{E}(t) = \vec{u}_\xi E_{\xi 0}\cos\omega t + \vec{u}_\eta E_{\eta 0}\sin\omega t$$

Pri $t = 0$ je $\vec{E}(0) = \vec{u}_\xi E_{\xi 0}$ a pri $t = T/2$ je $\vec{E}(T/2) = \vec{u}_\eta E_{\eta 0}$ a keďže $\vec{u}_\xi \perp \vec{u}_\eta$, predstavujú $E_{\xi 0}$ resp. $E_{\eta 0}$ hlavnú resp. Vedľajšiu poloos elipsy a priemety sprievodiča bodu elipsy $\vec{E}(t)$ do smerov jednotlivých osí sú $E_\xi(t) = E_{\xi 0}\cos\omega t$ a $E_\eta(t) = E_{\eta 0}\sin\omega t$. Vylúčením času z uvedených vzťahov (využijeme identitu $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$) dostávame známu rovnicu elipsy: $1 = \left(E_\xi / E_{\xi 0}\right)^2 + \left(E_\eta / E_{\xi 0}\right)^2$. Ak je naviac $E_{\xi 0} = E_{\eta 0}$, potom sa táto rovnica zmení na rovnicu kružnice, ak je niektorá z týchto hodnôt ($E_{\xi 0}, E_{\eta 0}$) nulová, podľa VIII.(*) bude $\vec{E}(t)$ oscilovať v danom smere. Vo všeobecnosti je teda vlnenie elipticky polarizované (kruhová alebo lineárna polarizácia sú len špeciálným prípadom eliptickej polarizácie) a rozlišujeme pritom ľavootáčavú vlnu, ak pri pohľade v smere pohybu vlny rotujú vektory proti smeru pohybu hodinových ručičiek, alebo pravootáčavú vlnu, ak pri pohľade v smere pohybu vlny rotujú vektory v smere pohybu hodinových ručičiek. Vo vzťahu VIII(1.15), tri vektory: $\vec{E}(t)$, $\vec{E}_R\cos\omega t$ a $\vec{E}_I\sin\omega t$ tvoria tri stany všeobecného trojuholníka, v ktorom na základe kosínovej vety je dĺžka sprievodiča bodu elipsy daná výrazom:

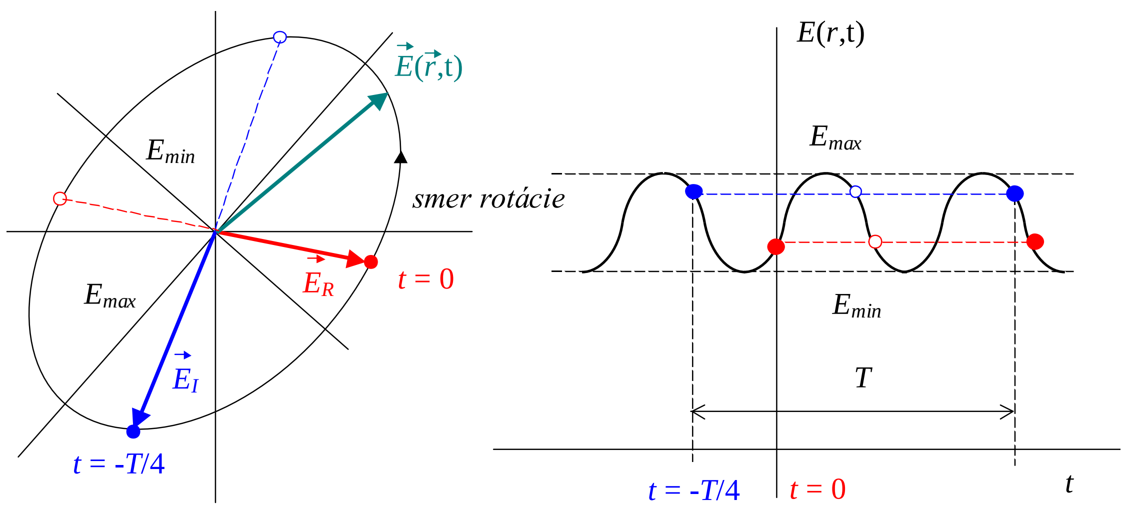
$$E(t) = \left|\vec{E}(t)\right| = \sqrt{E_R^2\cos^2\omega t + E_I^2\sin^2\omega t - \vec{E}_R\cdot\vec{E}_I\sin(2\omega t)} \qquad \text{VIII.(1.16)}$$

Vyšetrením vzťahu VIII(1.16) sa ľahko zistí, že nadobúda extrém maxima resp. minima, ktorá je totožná s dĺžkou hlavnej resp. vedľajšej poloosi, v časových okamihoch

$$t_{ext} = \frac{T}{4}\left[n - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\vec{E}_R \cdot \vec{E}_I}{E_R^2 - E_I^2}\right] \qquad \text{VIII.(1.17)}$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2 ...$ a T -je perióda. Priebeh intenzity $E(t) = \left|\vec{E}(t)\right|$ nie je v čase harmonická funkcia. Pri $\vec{E}_R \perp \vec{E}_I$ ak súčasne $E_R = E_I$ (t.j. pri kruhovej polarizácii), je dokonca podľa výrazu VIII(1.16) $E(t) = E_m = \sqrt{E_R^2 + E_I^2}$ = konštanta, a výraz VIII(1.17) nemá zmysel. Závislosti podľa VIII(1.15) a VIII(1.16) pri náhodne zvolenej dvojici vektorov $\vec{E}_R, \vec{E}_I$ sú na obr.VIII.1.

Efektívna hodnota priebehu $E(t) = \left|\vec{E}(t)\right|$, ktorý vo všeobecnosti nie je harmonický je (aká to zhoda okolností) $E_{ef} = E_m / \sqrt{2}$ ako sa možno ľahko presvedčiť integráciou výrazu VIII(1.16) v zmysle definície efekívnej hodnoty. Symbol E_0 , ktorý sme vyššie použili je totožný s efektívnou hodnotou priebehu E_{ef} . Hoci jedine pri *linearnej polarizacii* je aj časový priebeh intenzity poľa $\left|\vec{E}(t)\right|$ harmonická funkcia, všetky uvedené prípady zahňame pod pojem *harmonicke elektromagneticke pole*. To nie je nedôslednosť. Vychádzame z toho, že elipticky (aj kruhovo) polarizované vlnenie môžeme vždy vyjadriť ako zložené z dvoch lineárne polarizovaných vĺn (pri tej istej frekvencii □), navzájom fázovo posunutých.



Obr.VIII.1. Eliptická polarizácia

Napríklad v (*) je výsledné vlnenie $\vec{E}(\vec{r},t)$ zložené z lineárne polarizovanej vlny $\vec{E}_{\xi 0}\cos(\omega t + \varphi_\xi)$ orientovanej v smere $\vec{u}_\xi$ a z lineárne polarizovanej vlny $\vec{E}_{\eta 0}\cos(\omega t + \varphi_\eta)$, orientovanej v smere $\vec{u}_\eta$. Nie je ťažké presvedčiť sa, že takéto "skladanie" je možné aj v inom zmysle. Lineárne polarizovanú vlnu možno zložiť z dvoch kruhovo polarizovaných vĺn, alebo aj z dvoch elipticky polarizovaných vìn. Podobne, elipticky polarizovanú vlnu z dvoch kruhovo polarizovaných vĺn. V niektorých prípadoch takýto postup uľahčuje riešenie úloh. Príklady tohto druhu možno nájsť napríklad v [5].

Zo vzťahov VIII(1.15) sme do diskusie vybrali rovnicu ktorá opisuje správanie sa vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$, práve tak sme mohli vybrať rovnicu pre $\vec{H}(\vec{r},t)$. Všetko, čo sme tu povedali o vektore $\vec{E}$, vzťahuje sa aj na vektor $\vec{H}$. Pravda, zaujímavá je otázka, čo sa deje napríklad s vektorom $\vec{H}$, ak vektor $\vec{E}$ koná "istý druh pohybu" prislúchajúci danej polarizácii. Ak máme na mysli len tie dve zložky poľa $\vec{E}$ a $\vec{H}$ ktoré patria jednej vlne, t.j. okrem toho, že vyhovujú vlnovým rovniciam typu VIII(1.2), sú navzájom viazané Maxwellovými rovnicami, potom sa oba vektory správajú rovnako. Aká je polarizácia vektora $\vec{E}(\vec{r},t)$ taká musí byť aj polarizácia $\vec{H}(\vec{r},t)$. Máme tu na mysli lineárne a izotrópne prostredie s konštantami

κ, ε, μ . Nakoniec si treba uvedomiť, že vlnenie môže byť aj nepolarizovane. Takéto vlny, keď koncový bod vektorov $\vec{E}$ resp. $\vec{H}$ opisuje zložitejšiu krivku nepredstavujú harmonicke pole. Dajú sa však, za istých okolností, pomocou harmonických zložiek vyjadriť, napríklad formou Fourierovho radu, alebo pomocou Fourierovho integrálu, podobným spôsobom ako rozmanité časové priebehy napätí a prúdov (signály) v teórii obvodov.

VIII.2. FÁZOROVÉ-VEKTOROVE ROVNICE

Maxwellove rovnice a vlnové rovnice v komplexnom tvare

Podľa očakávania, zavedenie komplexnej reprezentácie harmonických časových funkcií má zjednodušiť najmä tie vzťahy, v ktorých sa vyskytujú derivácie podľa času, prípadne časové integrály. Máme tu na mysli skutočnosť, že ak $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{F}}(\vec{r})e^{j\omega t}$, potom

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t)}{\partial t} = j\omega \vec{\mathcal{F}}(\vec{r})e^{j\omega t} = j\omega \vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t) \qquad \text{VIII.(2.1)}$$

a tiež

$$\int \vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t)\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\vec{\mathcal{F}}(\vec{r})e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t) \qquad \text{VIII.(2.2)}$$

Filozófia nášho počínania je taká istá ako v teórii obvodov. Do vzťahov (rovníc), ktoré platia pre reálne časovo-priestorové závislosti $\vec{F}(\vec{r},t)$ dosadzujeme jednoducho ich komplexné reprezentácie (náhrady, alebo ich tzv."obrazy") $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t)$. Pochopiteľne, musí byť overená adekvátnosť výsledkov získaných priamo pri použití reálnej funkcie $\vec{F}(\vec{r},t)$ a na základe operácie s komplexnou funkciou $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r},t)$, keď použijeme z komplexného výsledku len reálnu časť. Tento postup nemusí byť vždy korektný, napríklad súčinu reálnych funkcií nezodpovedá reálna časť zo súčinu ich komplexných reprezentácií (náhrad). Iste si však pamätáte, že všetko je v poriadku pri takých matematických operáciách, ktoré sú lineárne. Patria sem derivácia a integrácia, násobenie funkcie konštantou a súčet, alebo rozdiel funkcií. Znamená to, že v komplexnom tvare budeme môcť zapísať Maxwellove rovnice ako rovnice algebraicke. S týmto zámerom, do (7.1.11) a (7.1.12) dosadíme namiesto reálnych časovo-priestorových funkcií $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{D}(\vec{r},t), \vec{H}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t),$ ich komplexné reprezentácie $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t), \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t), \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t), \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t),$. Potom využijeme vzťah VIII(2.1), podľa ktorého derivácia podľa času je formálne nahradená súčiniteľom " $j\omega$ ", takže po jej vykonaní možno zo všetkých rovníc eliminovať čas proste tak, že ich delíme (vykrátime) faktorom $e^{j\omega t}$. Tak napríklad, namiesto prvej rovnice VII(1.11) v diferenciálnom tvare, bude

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) + j\omega \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = (\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$$

keď sme využili, že: $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{j\omega t}$, $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r})e^{j\omega t}$ a tiež $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r})e^{j\omega t}$. Okrem toho, pri konštantných hodnotách κ, ε, μ : $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = \kappa \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ a $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \mu \vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$. Vynechajme zo zápisu aj symbol argumentu $(\vec{r})$, a dohodnime sa, že tam, kde nevieme rozlíšiť medzi "tlačeným" a "písaným" typom písma, alebo toto rozlíšenie z nejakých príčin použiť nechceme, použijeme pri komplexnej reprezentácii rovnaké písmeno ako pre reálnu funkciu, ale opatríme ho "tildou". Teda napr. $\Phi(\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\Phi}(\vec{r})\right\}$ a pod. Potom budeme všetky rovnice opäť zapisovať v stručnej (implicitnej) forme podľa schémy

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \to \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \equiv \vec{\mathcal{E}},\ \ \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) \to \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) \equiv \vec{\mathcal{D}},\ \ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) \to \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) \equiv \vec{\mathcal{H}},\ \ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) \to \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) \equiv \vec{\mathcal{B}}$$

Namiesto komplexnej reprezentácie časovo-priestorových závisostí $\vec{F}(\vec{r},t) \ \leftrightarrow\ \vec{\mathcal{F}}(\vec{r})e^{j\omega t},\ F(\vec{r},t) \ \leftrightarrow\ \mathcal{F}(\vec{r})e^{j\omega t}$, použijeme komplexnú reprezentáciu priestorovej závislosti - stručne fázor-vektory, alebo fázory

$$\vec{F}(\vec{r},0) \ \leftrightarrow\ \vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) \equiv \vec{\mathcal{F}}, \qquad F(\vec{r},0) \ \leftrightarrow\ \mathcal{F}(\vec{r}) \equiv \mathcal{F}$$

ktoré v skutočnosti predstavujú hodnoty reálnych vektorov (skalárov, čo môžu byť aj zložky vektorov) v čase $t = 0$ a v mieste $\vec{r}$.

Tak isto ako pre reálne funkcie (porovnaj vzťahy VII(1.11), VII(1.12)), môžeme aj teraz, pri ich komplexnej reprezentácii napísať v diferenciálnom a v integrálnom tvare Maxwellove rovnice a vzťahy vyjadrujúce hustoty príslušných tokov.

diferenciálny tvar : *integrálny tvar :*

$$\mathrm{rot}\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}}_v + j\omega\vec{\mathcal{D}} \qquad \oint_\Gamma \vec{\mathcal{H}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{\mathcal{J}}_v + j\omega\tilde{\chi} \qquad \text{VIII.(2.3)}$$

$$\mathrm{rot}\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\vec{\mathcal{B}} \qquad \oint_\Gamma \vec{\mathcal{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -j\omega\tilde{\Phi}$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathcal{D}} = \tilde{q}_v \qquad \oiint_\Sigma \vec{\mathcal{D}}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_v$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathcal{B}} = 0 \qquad \oiint_\Sigma \vec{\mathcal{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{VIII.(2.4)}$$

pritom fázory-vektory $\vec{\mathcal{J}}_v, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$, ktoré tu na rozdiel od vzťahov VII(1.11), VII(1.12) predstavujú komplexnú reprezentáciu hustoty toku: $\vec{\mathcal{J}}_v$ -elektrického (t.j. prúd), $\tilde{\chi}$ -dielektrického a $\tilde{\Phi}$ -magnetického, môžu byť vyjadrené takto

$$\vec{\mathcal{J}}_v = \kappa\vec{\mathcal{E}} \qquad \mathcal{J}_v = \iint_\Sigma \vec{\mathcal{J}}_v \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{VIII.(2.5)}$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \qquad \tilde{\Phi}_E = \iint_\Sigma \vec{\mathcal{D}}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}} + \mu_0\vec{\mathcal{M}} \qquad \Phi_M = \iint_\Sigma \vec{\mathcal{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{VIII.(2.6)}$$

Podobne, ako sme zo VII(1.11) až VII(1.14) pre fázor-vektory poľa $\vec{\mathcal{J}}_v, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{B}},$, dostali vzťahy VIII(2.3) až VIII(2.6), môžeme teraz prepisat ľubovoľný (prv použitý) vyraz do zodpovedajúceho komplexného tvaru. Týka sa to nielen už uvedených vektorov poľa, ale aj skalárneho potenciálu, vektorového potenciálu a Hertzových vektorov

$$\varphi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\varphi}(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad \varphi(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\varphi}(\vec{r})\right\} \equiv \tilde{\varphi}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad \vec{A}(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{\vec{A}(\vec{r})\right\} \equiv \vec{A} \qquad \text{VIII.(2.7)}$$

$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{\Pi}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad \vec{\Pi}(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\Pi}(\vec{r})\right\} \equiv \vec{\Pi}$$

a vo výrazoch sa môžu objaviť komplexné reprezentácie aj takých veličín, ako je elektrický prúd, alebo jeho hustota, voľný (alebo napr. i polarizačný) náboj, alebo aj jeho hustota a iné. S niektorými sa ešte stretneme.

$$i_v(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{J}}_v(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad i_v(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{i_v(\vec{r})\right\} \equiv I_v = \sqrt{2}I_{ef\ v}$$

$$\vec{J}_v(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{J}}_v(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad \vec{J}_v(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{\vec{J}_v(\vec{r})\right\} \equiv \vec{J}_v$$

$$Q_v(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{Q}_v(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad Q_v(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{Q_v(\vec{r})\right\} \equiv Q_v \qquad \text{VIII.(2.8)}$$

$$q_v(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{q}_v(\vec{r})e^{j\omega t}\right\} \quad\to\quad q_v(\vec{r},0) = \mathrm{Re}\left\{q_v(\vec{r})\right\} \equiv q_v$$

Poznamenajme, že v odbornej, najmä teoretickej, literatúre sa často vôbec nerozlišuje medzi reálnou funkciou a jej komplexnou reprezentáciou. Takýto postup nemožno označiť za chybu, pokiaľ nazeráme na komplexné funkcie ako na možné riešenia matematickych rovníc. Pri posudzovaní meratelnosti resp. pozorovatelnosti veličín pri experimentoch, musíme však brať zreteľ na ich reálny charakter. Inými slovami, teoretický obraz o procesoch v prírode môžeme vybudovať na základe komplexnych funkcií, ale pri konfrontácii teoretických predpovedí so správaním sa skutočných sústav, a to nielen v technickej praxi, budeme sa vždy potýkať len s reálnymi funkciami. V úvode do teórie elektromagnetického poľa, sme o tom presvedčení, je však dôsledné rozlišovanie žiadúce lebo pomáha lepšie pochopiť súvislosti. Veľmi dobrým cvičením by bolo (a také ťažko nedoporučiť), prejsť znova kapitolu VII.3 a všetky vzťahy aj ich úpravy a odvodzovanie zopakovať pri komplexnej symbolike veličín.

Prakticky najdôležitejšia otázka teraz je: Aká bude vlnová rovnica pri komplexnej symbolike, a ako máme hľadať jej riešenia v tomto špeciálnom (rozumej harmonickom) prípade. Ak budete mať na pamäti vzťah VIII(2.1), ľahko sa môžete presvedčiť, že vlnová rovnica (napr.VII(3.8) alebo VII(3.10)), bude mať teraz formu

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2 - j\omega\kappa\mu - j\omega j\omega\ \varepsilon\mu\right] \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) &= -\mu\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r})\\ \left[\nabla^2 - j\omega\kappa\mu - j\omega j\omega\ \varepsilon\mu\right] \tilde{\varphi}(\vec{r}) &= -\tilde{q}_v(\vec{r})/\varepsilon\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.9)}$$

kde operátor, ktorý pôsobí na vektorovú komplexnú funkciu $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$ resp. na skalárnu komplexnú funkciu $\tilde{\varphi}(\vec{r})$, môžno zapísať takto

$$\left[\nabla^2 - j\omega\kappa\mu - j\omega j\omega\ \varepsilon\mu\right] = \left[\nabla^2 - j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon\right] \equiv \left[\nabla^2 - \gamma^2\right] \qquad \text{VIII.(2.10)}$$

Uvážili sme, že derivácii podľa času bude teraz formálne odpovedať násobenie faktorom $j\omega$ a vo formule VIII(2.10) sme zrejme označili

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)} \qquad \text{VIII.(2.11)}$$

Komplexné zdrojové funkcie na pravej strane rovníc: $\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r})$ a $\tilde{q}_v(\vec{r})$ budú v nasledujúcich úvahach najčastejšie nulové, takže homogenne vlnové rovnice s ktorými sa budeme stretať v prípade komplexného vektorového resp. komplexného skalárneho potenciálu budú mať tvar

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{\mathcal{A}} = \gamma^2\vec{\mathcal{A}}, &\quad \nabla^2\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \gamma^2\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})\\ \nabla^2\tilde{\varphi} = \gamma^2\tilde{\varphi}, &\quad \nabla^2\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \gamma^2\tilde{\varphi}(\vec{r})\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.12)}$$

Na mieste vektorového potenciálu $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$ môže byť samozrejme ktorýkoľvek z komplexných vektorov poľa $\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{D}},\vec{\mathcal{H}},\vec{\mathcal{B}},$.

Dotknime sa teraz otázky riešenia rovnic uvedeného typu. Prepíšeme rovnice VIII(2.9) s využitím VIII(2.11)

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) - \gamma^2\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \mu\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r}), &\qquad \nabla^2\vec{\mathcal{A}} - \gamma^2\vec{\mathcal{A}} = \mu\vec{\mathcal{J}}_0\\ \nabla^2\tilde{\varphi}(\vec{r}) - \gamma^2\tilde{\varphi}(\vec{r}) = -\tilde{q}_v(\vec{r})/\varepsilon, &\qquad \nabla^2\tilde{\varphi} - \gamma^2\tilde{\varphi} = -\tilde{q}_v/\varepsilon\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.13)}$$

rovnice VIII(2.13) sa niekedy uvádzajú ako Helmholtzove rovnice. Sú komplexnou verziou rovníc VII(3.8) a VII(3.10) pri $\kappa = 0$, a preto ich riešenie v nekonečne rozľahlom priestore, môžeme odvodiť z riešení VII(3.14) resp. VII(3.13). Využijeme VIII(2.7) a do VII(3.14) resp. do VII(3.13) dosadíme namiesto $\vec{A}(\vec{r},t)$ výraz $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})e^{j\omega t}$ a namiesto $\varphi(\vec{r},t)$ dosadíme výraz $\tilde{\varphi}(\vec{r})e^{j\omega t}$. Ďalej, na mieste $\vec{J}_0(\vec{r}\,',t')$ bude $\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r}\,')e^{j\omega t'}$ a $q_v(\vec{r}\,',t')$ zameníme výrazom $\tilde{q}_v(\vec{r}\,')e^{j\omega t'}$. Pritom $t' = t - \Delta t$, kde $\Delta t = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|/v$ alebo $\Delta t = R(\vec{r},\vec{r}\,')/v$, pozri článok VII.3. Takto dostaneme

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})e^{j\omega t} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r}\,')e^{j\omega t}e^{-j\omega R(\vec{r},\vec{r}\,')/v}}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v' \qquad \text{VIII.(2.14)}$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{r})e^{j\omega t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega \frac{q_v(\vec{r}\,')e^{j\omega t}e^{-j\omega R(\vec{r},\vec{r}\,')/v}}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v' \qquad \text{VIII.(2.15)}$$

Reálne časti rovníc VIII(2.14),VIII(2.15) sú rovnicami VII(3.13), VII(3.14). Ak v posledných rovniciach vynecháme súčiniteľ $e^{j\omega t}$ na oboch stranách rovníc, dostaneme riešenia komplexných retardovaných potenciálov v harmonickom poli. Opäť, na mieste $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$ môže byť ktorýkoľvek vektor poľa. Všimnite si výraz VIII(2.12) pri $\kappa = 0$. Bude $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, takže v tomto prípade by vo výrazoch VIII(2.14),VIII(2.15) mohol vystupovať faktor $e^{-\gamma R}$. Predstavte, si rovnice VII(3.11),VII(3.12) prepísané do komplexného tvaru, budú ako rovnice VIII(2.13) v ktorých namiesto γ^2 je $(j\omega/v)^2$. Uvážte, že rovnice VIII(2.13) sú komplexným tvarom rovníc VII(3.8), VII(3.10). Riešenie rovníc VIII(2.13) je formálne také isté ako riešenie komplexnej verzie rovníc VII(3.11),VII(3.12) v ktorom namiesto $j\omega/v$ bude vystupovať symbol γ. Riešenie nehomogénných rovníc VIII(2.13) v nekonečne rozľahlom (vodivom) prostredí je teda

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r}\,')e^{-\gamma R(\vec{r},\vec{r}\,')/v}}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v'$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega \frac{q_v(\vec{r}\,')e^{-\gamma R(\vec{r},\vec{r}\,')/v}}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v' \qquad \text{VIII.(2.16)}$$

Tu si treba uvedomiť, že hodnoty potenciálov v mieste $(\vec{r})$ sú dané rozložením hustôt zdrojov $\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{r}\,')$, $q_v(\vec{r}\,')$ v miestach $(\vec{r}\,')$ avšak s patričným oneskorením implicitne vyjadreným faktormi šírenia vĺn: $e^{-\gamma R(\vec{r},\vec{r}\,')/v}$ a váhovou funkciou $R^{-1}(\vec{r},\vec{r}\,')$, ktorá vyjadruje tým menší vplyv hustoty zdroja v mieste $\vec{r}\,'$, čím väčšia je jeho vzdialenosť od miesta $\vec{r}$.

Prv, než sa budeme zaoberať otázkou riešenia homogénnych rovníc VIII(2.12), a než prejdeme k interpretácii výrazu γ podľa VIII(2.11), Oživíme isté súvislosti o ktorých už bola reč v článku VIII.1. Tieto teraz posilníme, už vytvorenou predstavou (presnejšiu definíciu uvedieme neskôr) o tzv. rovinnej vlne, o ktorej sme sa zmienili pri výklade polarizácie vlnenia v článku VIII.1. Podľa uvedeného je rovinná vlna taký prípad elektromagnetického poľa, kedy je krivka opisovaná koncovým bodom vektora $\vec{E}$ (a tak isto aj vektora $\vec{H}$) v každom bode určitej roviny rovnaká. Z toho vyplýva, že ak zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, aby niektorá z jej rovín bola s touto rovinou rovnobežná, budú vektory poľa závisieť len od tej súradnice, ktorá je na zmienenú rovinu kolmá. Nech je to súradnica x ! Vektory poľa $\vec{E}(\vec{r},t) \equiv \vec{E}(x,t)$ a $\vec{H}(\vec{r},t) \equiv \vec{H}(x,t)$ zotrvávajú v rovine $[y,z]$. V tomto špeciálnom prípade, budeme mať: $\nabla^2 \equiv \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$. Charakter parciálnej derivácie sa tu stratil, lebo jedinou priestorovou premennou je x a čas (t) vo fázorovej rovnici nie je obsiahnutý. Vlnové rovnice *rovinnej vlny*, za predpokladu, že v danej časti priestoru nie sú voľné elektrické náboje q_v, a netečú v nej vonkajšími zdrojmi vnútené (nezávislé) prúdy J_0, nadobudnú tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathcal{E}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\vec{\mathcal{E}}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathcal{H}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\vec{\mathcal{H}}(x) \qquad \text{VIII.(2.17)}$$

Sú to obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu, s konštantnými koeficientami. Sú také isté, ako boli rovnice pre fázory $\mathcal{U}(x)$ a $\mathcal{I}(x)$ na homogénnom vedení. Aj ich riešenie je také isté (D(3.01), a preto vieme, že riešenie rovníc VIII(2.17) je

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(x) &= \vec{\mathcal{E}}_P(x) + \vec{\mathcal{E}}_S(x) = \vec{\mathcal{E}}_P(0)e^{-\gamma x} + \vec{\mathcal{E}}_S(0)e^{\gamma x}\\ \vec{\mathcal{H}}(x) &= \vec{\mathcal{H}}_P(x) + \vec{\mathcal{H}}_S(x) = \vec{\mathcal{H}}_P(0)e^{-\gamma x} + \vec{\mathcal{H}}_S(0)e^{\gamma x}\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.18)}$$

kde $\vec{\mathcal{E}}_P(0), \vec{\mathcal{E}}_S(0)$ a podobne aj $\vec{\mathcal{H}}_P(0), \mathcal{H}_S(0)$ sú konštanty vzájomne viazané tak, aby riešenia VIII(2.18) vyhovovali Maxwellovým rovniciam (okrem toho, že vyhovujú homogénnej vlnovej rovnici). Predsa však je tu istý rozdiel. V rovniciach VIII(2.18) nevystupujú fázory, ale fazory-vektory. Vlastne to znamená, že VIII(2.18) nepredstavuje len dve, ale šesť (skalárnych) rovníc. V harmonickom poli bez ujmy na všeobecnosti riešenia môžeme predpokladať, že (napríklad) vektor $\vec{E}(x,t) \equiv \vec{u}_y E_y(x,t)$ má smer len jednej z osí a je lineárne polarizovaný. Zložitejšie prípady, ako už vieme, môžu byť vyjadrené superpozíciou viacerých lineárne polarizovaných vĺn. Aby sme zistili aký smer má (alebo môže mať) vektor $\vec{H}(x,t)$, obrátime sa o pomoc k Maxwellovým rovniciam VII(1.11), alebo k ich komplexnej verzii VIII(2.3). Ak je totiž $\vec{E}_y(x,t) \equiv \vec{u}_y E_y(x,t)$, vzhľadom na to, že $\vec{E}_y(x,t) \equiv \mathrm{Re}\{\vec{\mathcal{E}}_y(x,t)\}$ je $\vec{\mathcal{E}}_y(x,t) \equiv \vec{u}_y \mathcal{E}_y(x)e^{j\omega t}$. Preto pri $t=0$, kedy je $\vec{\mathcal{E}}_y(x,0) \equiv \vec{u}_y \mathcal{E}_y(x)$, a kedy $\vec{E}_y(x,0) \equiv \mathrm{Re}\{\vec{u}_y \mathcal{E}_y(x,0)\} = \mathrm{Re}\{\vec{u}_y \mathcal{E}_y(x)\}$ a smer, priradený fázoru-vektoru (tu: $\vec{u}_y$) je totožný so smerom príslušného (reálneho) vektora v okamihu $t=0$: $\vec{E}_y(x,0) \equiv \vec{u}_y E_y(x,0)$. Vypočítajme rotáciu fázora-vektora $\mathcal{E}_y(x)$ (D(2.09)), a dosaďme do druhej rovnice VIII(2.3) v diferenciálnom tvare. So zreteľom na vzťah $\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}}$ dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}}_y(x) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{u}_z \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(x)}{\mathrm{d}x} = -j\omega\mu\vec{\mathcal{H}}_z(x) \qquad \text{VIII.(2.19)}$$

podľa toho je $\vec{\mathcal{H}}(x) \equiv \vec{u}_z \mathcal{H}_z(x)$ a: $-j\omega\mu\mathcal{H}_z(x) = \mathrm{d}\mathcal{E}_y(x)/\mathrm{d}x$. Vektor $\vec{H}_z(x,t) \equiv \vec{u}_z H_z(x,t)$ má pri lineárnej polarizácii smer $\pm\vec{u}_z$. Pri lineárnej polarizácii (a len pri nej) môžeme v rovniciach VIII(2.17) aj VIII(2.18) písať namiesto fázorov-vektorov len príslušné fázory. V uvedených výrazoch proste vynecháme "šípky". Dospeli sme k poznatku, že v rovinnej, lineárne polarizovanej vlne sú vektory $\vec{E}(x,t)$ a $\vec{H}(x,t)$ navzájom kolmé, v ľubovolnom bode priestoru a v každom okamihu. Teraz sú rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_y(x)}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\mathcal{E}_y(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_z(x)}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\mathcal{H}_z(x) \qquad \text{VIII.(2.20)}$$

a ich riešenia

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_y(x) &= \mathcal{E}_{yP}(x) + \mathcal{E}_{yS}(x) = \mathcal{E}_{yP0}e^{-\gamma x} + \mathcal{E}_{yS)}e^{\gamma x}\\ \mathcal{H}_z(x) &= \mathcal{H}_{zP}(x) - \mathcal{H}_{-zS}(x) = \mathcal{H}_{zP0}e^{-\gamma x} - \mathcal{H}_{-zS0}e^{\gamma x}\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.21)}$$

také isté, ako sme poznali na homogénnom vedení. Kvôli stručnosti sme vyššie zapísali $\mathcal{E}_{yP0}(0) \equiv \mathcal{E}_{yP0}$, $\mathcal{E}_{yS0}(0) \equiv \mathcal{E}_{yS0}$, $\mathcal{H}_{zP}(0) \equiv \mathcal{H}_{zP0}$, $\mathcal{H}_{-zS}(0) \equiv \mathcal{H}_{-zS0}$. Zaznamenávame tu zrejmú korešpondenciu

$$\begin{matrix} \mathcal{E}(x) & \leftrightarrow & \mathcal{U}(x), & \mathcal{H}x) & \leftrightarrow & \mathcal{I}(x) \\ \text{(V/m)} & & \text{(V),} & \text{(A/m)} & & \text{(A),} \end{matrix} \qquad \text{VIII.(2.22)}$$

Iste ste si všimli znamienko mínus v druhej z rovníc VIII(2.21), na rozdiel od kladného znamienka v druhej z rovníc VIII(2.18). Pokým nešpecifikujeme hodnotu $\mathcal{H}_{-zS0}$ môže byť toto znamienko ľubovoľné, a celkom iste sa možno dohodnúť na označení $-\mathcal{H}_{-zS0} = \mathcal{H}_{zS0}$. Podľa prv uvedeného totiž $\vec{\mathcal{H}}_{S0} \equiv \vec{u}_z \mathcal{H}_{S0}$ a preto druhý člen v poslednej z rovníc VIII(2.18) resp. VIII(2.21) má byť: $\vec{\mathcal{H}}_{zS0} e^{\gamma x} \equiv \vec{u}_z \mathcal{H}_{zS0} e^{\gamma x}$ resp. $+\mathcal{H}_{zS0} e^{\gamma x}$. Zaujímavé je porovnanie konštanty γ podľa VIII(2.11) s ekvivalentným výrazom (symbol "γ" bol ten istý) na homogénnom vedení,

homogénne vedenie	*homogénna rovinná vlna*
$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$	$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)}$

z ktorého plynú tieto vzťahy formálnej analógie, o to pútavejšie, že vedú k rozmerovej zhode

$$\begin{matrix} R_0 \leftrightarrow 0, & L_0 \leftrightarrow \mu, & G_0 \leftrightarrow 0, & C_0 \leftrightarrow \varepsilon, \\ (\Omega/\text{m}) & (\text{H/m}) & (\text{S/m}) & (\text{F/m}) \end{matrix} \qquad \text{VIII.(2.23)}$$

Na prvý pohľad tu môže byť zarážajúca korešpondencia $R_0 \leftrightarrow 0$, avšak ešte uvidíme že zmysel bude mať aj prípad $R_0 \leftrightarrow \text{konšt.} \neq 0$.

Podľa VIII(2.19) je: $-j\omega\mu\mathcal{H}_z(x) = \mathrm{d}\mathcal{E}_y(x)/\mathrm{d}x$ a podobný vzťah dostaneme, ak vypočítame rotáciu fázora-vektora $\vec{\mathcal{H}}_z(x) = \vec{u}_z \mathcal{H}_z(x)$ a dosadíme ju do prvej rovnice VIII(2.3), pričom využijeme vzťahy $\vec{\mathcal{J}}_v = \kappa\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}}$.

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}}_z(x) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_z \end{vmatrix} = -\vec{u}_y \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_z(x)}{\mathrm{d}x} = (k + j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}}_y(x) \qquad \text{VIII.(2.24)}$$

Vidíme, že je $\vec{\mathcal{E}}_y(x) = \vec{u}_y \mathcal{E}_y(x)$. Potvrdzuje sa teda spolupatričnosť zložiek $\vec{E}_y(x,t), \vec{H}_z(x,t)$ a nachádzame vzťah: $(\kappa + j\omega\varepsilon)\mathcal{E}_y(x) = -\,\mathrm{d}\mathcal{H}_z(x)/\mathrm{d}x$. Aby sme našli vzájomný vzťah medzi fázormi-vektormi $\vec{\mathcal{E}}_P(0), \vec{\mathcal{E}}_S(0), \vec{\mathcal{H}}_P(0), \vec{\mathcal{H}}_S(0)$, v VIII(2.18) resp. medzi fázormi $\mathcal{E}_{yP0}, \mathcal{E}_{yS0}, \mathcal{H}_{zP0}, \mathcal{H}_{-zS0}$ v VIII(2.21), stačí využiť jednu z rovníc VIII(2.19) alebo VIII(2.24). Vypočítajme deriváciu prvej z rovníc VIII(2.21) podľa $\mathrm{d}x$, a na ľavej strane takto vytvorenej rovnice dosaďme za $\mathrm{d}\mathcal{E}_y(x)/\mathrm{d}x$ z rovnice VIII(2.19), pričom uvážime, že $\vec{\mathcal{H}}_z(x) = \vec{u}_z \mathcal{H}_z(x)$ a súčasne namiesto $\mathcal{H}_z(x)$ dosadíme druhú z rovníc VIII(2.21). Takto dostaneme

$$\frac{j\omega\mu}{\gamma}\left(\mathcal{H}_{zP0}e^{-\gamma x} - \mathcal{H}_{-zP0}e^{\gamma x}\right) = \mathcal{E}_{yP0}e^{-\gamma x} + \mathcal{E}_{ysP0}e^{\gamma x} \qquad \text{VIII.(2.25)}$$

Namiesto uvedeného postupu, mohli by sme derivovať druhú z rovníc VIII(2.21), využiť rovnicu VIII(2.24) a dosadzovať namiesto $\mathcal{E}_y(x)$ prvú z rovníc VIII(2.21). K rovnici VIII(2.25) sa ešte vrátime. Aby sme mohli hovoriť o jej význame, treba si ujasniť význam fázorov, konštánt $\mathcal{E}_{yP0}, \mathcal{E}_{yS0}, \mathcal{H}_{zP0}, \mathcal{H}_{-zS0}$. Najprv však treba poznať význam konštanty γ, čo pre toho, komu nie je cudzia problematika homogénnych vedení, je jednoduché. Podľa VIII(2.11) je g komplexné číslo, a dá sa ukázať, že pre zložky $\gamma = \alpha + j\beta$ platí:

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(-1+\sqrt{1+(\frac{k}{\varepsilon\omega})^2}\right)},\quad \beta=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1+\sqrt{1+(\frac{k}{\varepsilon\omega})^2}\right)} \qquad \text{VIII.(2.26)}$$

Koštanta γ, ktorá sa vyskytuje vo vzťahoch VIII(2.18), VIII(2.21) a VIII(2.25) vo výrazoch typu $e^{\pm\gamma x}$ nazýva sa vlnová konštanta alebo tiež konštanta širenia. Jej význam objasníme ak si uvedomíme, že ľubovoľný z dvoch členov na pravej strane napr. v rovniciach VIII(2.18) predstavuje samostatné riešenie. Napríklad fázor-vektor intenzity elektrického poľa je: $\vec{\mathcal{E}}(x)=\vec{\mathcal{E}}_P(x)+\vec{\mathcal{E}}_S(x)$, kde

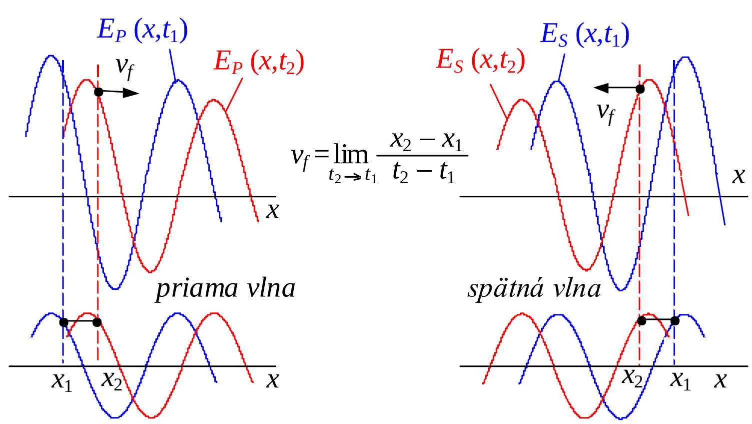
$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_P(x)&=\vec{\mathcal{E}}_{P0}e^{-\gamma x}=\vec{u}_P E_{P0}e^{j\varphi_{EP}}e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}=\vec{u}_P E_{P0}e^{-\alpha x}e^{j(\varphi_{EP}-\beta x)}=\vec{u}_P E_P(x)e^{j\Phi_P(x)}\\ \vec{\mathcal{E}}_S(x)&=\vec{\mathcal{E}}_{S0}e^{\gamma x}=\vec{u}_P E_{S0}e^{j\varphi_{ES}}e^{\alpha x}e^{j\beta x}=\vec{u}_P E_{P0}e^{\alpha x}e^{j(\varphi_{ES}+\beta x)}=\vec{u}_S E_S(x)e^{j\Phi_S(x)}\end{aligned} \qquad \text{VIII.(2.27)}$$

pričom amplitúdy $E_P(x)=E_{P0}e^{-\alpha x}$, $E_S(x)=E_{S0}e^{\alpha x}$ a ich fázy $\Phi_P(x)=-\alpha x+\varphi_{EP}$, $\Phi_S(x)=\alpha x+\varphi_{ES}$ sú funkciami polohy (x). Uvedným fázorom rotujucim ako funkcie času v komplexnej rovine prislúchajú, v súlade s VIII(1.6), reálne vektorové

$$\vec{E}_P(x,t)=\vec{u}_P\,\mathrm{Re}\left\{E_P(x)e^{j\Phi_P(x)}e^{j\omega t}\right\}=\vec{u}_P\underbrace{E_{P0}e^{-\alpha x}}_{\text{AMPLITÚDA}}\cos(\omega t\underbrace{-\beta x+\varphi_{EP}}_{\text{FÁZA}})=\vec{u}_P\underbrace{E_P(x)}_{\text{AMPLITÚDA}}\cos\left(\omega t+\underbrace{\Phi_{EP}(x)}_{\text{FÁZA}}\right) \qquad \text{VIII.(2.28)}$$

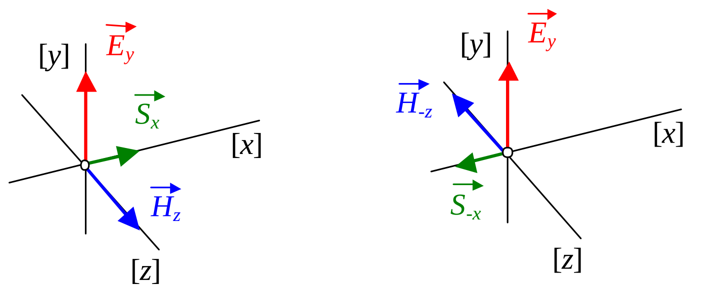
$$\vec{E}_S(x,t)=\vec{u}_S\,\mathrm{Re}\left\{E_S(x)e^{j\Phi_S(x)}e^{j\omega t}\right\}=\vec{u}_S\underbrace{E_{S0}e^{\alpha x}}_{\text{AMPLITÚDA}}\cos(\omega t\underbrace{+\beta x+\varphi_{ES}}_{\text{FÁZA}})=\vec{u}_S\underbrace{E_S(x)}_{\text{AMPLITÚDA}}\cos\left(\omega t+\underbrace{\Phi_{ES}(x)}_{\text{FÁZA}}\right) \qquad \text{VIII.(2.29)}$$

z ktorých je jasné, že ich amplitúdy sa v závislosti od polohy (x) menia s faktorom $e^{-\alpha x}$ resp. $e^{\alpha x}$, a ich fázy sú v závislosti od premennej (x) ovplyvňované faktormi $-\beta x$ resp. βx. Máme už toľko skúseností, aby sme vo výrazoch VIII(2.28) resp. VIII(2.29) rozpoznali tzv. postupnú resp. spätnú vlnu šíriacu sa v smere osi [x] resp. v smere osi [-x]. Vieme už, aj to, že tzv. fázová rýchlosť $v=\omega/\beta=2\pi f/\beta=f/\lambda$, kde fázová konštanta $\beta=2\pi/\lambda$, a kde λ - je *vlnová dĺžka*. Všetko presne tak, ako na homogénnom vedení. Tieto skutočnosti sú znázornené na obr.VIII.2, kde si hodno povšimnúť, že v miestach x_1, x_2, v ktorých je vlnenie v rovnakej fáze v okamihoch t_1, t_2 - čo dobre rozpoznáme na priebehoch znázornených v dolnej časti obrázku - sú rozdielne amplitúdy, ako to vidieť na priebehoch v hornej časti obrázku. V dolnej časti sú znázornené priebehy $\cos(\omega t\pm\beta x)$, pokým v hornej časti sú priebehy $E(x,t)=E_0e^{\pm\alpha x}\cos(\omega t\pm\beta x)$. Aj význam fázorov $\mathcal{E}_{P0}=E_{P0}e^{j\varphi_{EP}}\equiv E_{P0}\angle\varphi_{EP}$, $\mathcal{E}_{S0}=E_{S0}e^{j\varphi_{ES}}\equiv E_{S0}\angle\varphi_{ES}$ a $\mathcal{H}_{P0}=H_{P0}e^{j\varphi_{HP}}\equiv H_{P0}\angle\varphi_{HP}$, $\mathcal{H}_{P0}=H_{P0}e^{j\varphi_{HH}}\equiv H_{P0}\angle\varphi_{HP}$ je jasný - sú to hodnoty, ktoré nadobúda fázor postupnej resp. spätnej vlny priradený miestu x = 0.



Obr.VIII.2 Priama a spätná vlna – časovo-priestorový priebeh intenzity

V nekonečne rozľahlom a homogénnom prostredí, kde nie je dôvod na to, aby vznikla odrazená vlna, bude v najjednoduchšom prípade existovať len jediná vlna. To, či je vlna priama, alebo či je spätná prejavuje sa vo výrazoch $e^{\pm\gamma x}$ znamienkom pred konštantou γ - a odtiaľ aj pred konštantami α a β vo vzťahoch VIII(2.28) a VIII(2.29) - avšak aj pri jedinej vlne môžeme smer osi napr. [x] zvoliť buď v smere šírenia, alebo proti nemu. Podľa toho má zmysel hovoriť o priamej a spätnej vlne len vtedy, ak existujú obidve. Samostatnú vlnu môžno pritom, podľa okolností, formálne vyjadriť ako priamu alebo ako spätnú vlnu. Teraz si opäť prezrieme vzťah VIII(2.25). V nekonečne rozľahlom lineárnom prostredí (pri jedinej harmonickej vlne) budú existovať len členy s faktorom $e^{-\gamma x}$, alebo len členy s faktorom $e^{\gamma x}$. Už vieme, že je vcelku ľahostajné ktoré to budú (je to otázka voľby kladného smeru osi [x]). Nech sú postupne zvolené obe možnosti, tak ako to je znázornené na obr.VIII.3. Pritom je v oboch prípadoch $\vec{E}(x,t) \equiv \vec{E}_y(x,t)$ a vlna v prvom prípade postupuje v smere osi [x], v druhom v smere osi [-x], v oboch prípadoch je súradnicová sústava rovnako orientovaná. Pretože Poyntingov $\vec{S}(x,t) = \vec{E}(x,t) \times \vec{H}(x,t)$, ktorý udáva smer postupu vlnenia, je v oboch prípadoch navzájom opačne orientovaný, musí byť v takom istom vzťahu aj vzájomná orientácia vektorov $\vec{H}(x,t)$. V prvom prípade je intenzita magnetického poľa orientovaná do smeru osi [z], v druhom má smer [-z]. V prvom prípade bude rovnica obsahovať len členy s $e^{-\gamma x}$, v druhom len členy s $e^{\gamma x}$.



vlna postupuje v smnere osi [+x] *vlna postupuje v smnere osi* [-x]

$$\vec{E}_y(x,t) = \vec{u}_y E_y(x,t) \qquad \vec{E}_y(x,t) = \vec{u}_y E_y(x,t)$$
$$\vec{H}_z(x,t) = \vec{u}_z H_z(x,t) \qquad \vec{H}_{-z}(x,t) = -\vec{u}_z H_{-z}(x,t)$$

Obr.VIII.3. Priama a spätná vlna - orientácia vektorov intenzity

V oboch prípadoch dostávame rovnaký podiel

$$\frac{j\omega}{\gamma} = \frac{\mathcal{E}_{yP0}}{\mathcal{H}_{zP0}} = \frac{\mathcal{E}_{yS0}}{\mathcal{H}_{-zS0}} = \mathcal{Z} \qquad \text{VIII.(2.30)}$$

Konštantu $\mathcal{Z} = j\omega\mu/\gamma$ vyjadríme pomocou VIII(2.11) v tvare

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}} \qquad \text{VIII.(2.31)}$$

Priamo z VIII(2.30) je vidieť, že voľba záporného znamienka pred druhým členom v druhej z rovníc VIII(2.21) má za následok, že podiel fázorov $\mathcal{E}_{yP}(x) = \mathcal{E}_{yP0}e^{-\gamma x}$ a $\mathcal{H}_{zP}(x) = \mathcal{H}_{zP0}e^{-\gamma x}$ priamej vlny - prvé dva členy v rovniciach VIII(2.21) - aj podiel fázorov $\mathcal{E}_{yS}(x) = \mathcal{E}_{yS0}e^{\gamma x}$ a $\mathcal{H}_{-zS}(x) = \mathcal{H}_{-zS0}e^{\gamma x}$ spätnej vlny - druhé dva členy v rovniciach VIII(2.21) - je ten istý. Táto voľba má svoju logiku najmä so zreteľom na vyššie uvedenú diskusiu - pozri tiež obr.VIII.3. Pri zvolenom kladnom znamienku v VIII(2.21) by mal podiel fázorov $\mathcal{E}_P(x)/\mathcal{H}_P(x) = \mathcal{Z}$ pri priamej vlne kladné, ale pri spätnej vlne $\mathcal{E}_S(x)/\mathcal{H}_S(x) = -\mathcal{Z}$, záporné znamienko. Niektorí autori takúto konvenciu používajú. Komplexná konštanta $\mathcal{Z}$ podľa VIII(2.31) nazýva sa vlnová alebo niekedy tiež charakteristická impedancia prostredia. Je veľmi dôležité uvedomiť si, že bola definovaná v lineárnom a v nekonečne rozľahlom prostredí, pri harmonickom poli a pri lineárne polarizovanej rovinnej vlne. Porovnanie s charakteristickou impedanciou homogénneho vedenia $\mathcal{Z}$, na základe vzťahov VIII(2.23) ponechávame na čitateľa. Preto, že vo vzťahoch, ktorými vyjadrujeme riešenie - pozri napr. VIII(2.18) - sa zásadne používajú fazory-vektory, namiesto vzťahu typu VIII(2.31) je často vhodnejší zápis

$$\vec{\mathcal{E}}_P(x) = \mathcal{Z}\vec{\mathcal{H}}_P(x)\times\vec{u}_P, \qquad \vec{\mathcal{E}}_S(x) = \mathcal{Z}\vec{\mathcal{H}}_S(x)\times\vec{u}_P$$
$$\vec{\mathcal{H}}_P(x) = \vec{u}_P\times\frac{\vec{\mathcal{E}}_P(x)}{\mathcal{Z}}, \qquad \vec{\mathcal{H}}_S(x) = \vec{u}_S\times\frac{\vec{\mathcal{E}}_S(x)}{\mathcal{Z}} \qquad \text{VIII.(2.32)}$$

kde $\vec{u}_P, \vec{u}_S$ sú jednotkové vektory v smere postupu tej ktorej vlny.

Poznamenajme ešte, že charakteristickú impedanciu možno definovať aj pri iných typoch vlnenia, nielen pri rovinej vlne. S jedným z takých prípadov, poľom vyžarovaným elementárnym harmonicky kmitajúcim dipólom, sa stretneme ešte v tejto kapitole. V príklade, ktorý sme vyššie diskutovali, bolo $\vec{\mathcal{E}}_P = \vec{u}_y\mathcal{E}_{yP}$, $\vec{\mathcal{H}}_P = \vec{u}_z\mathcal{H}_{zP}$, $\vec{\mathcal{E}}_S = \vec{u}_y\mathcal{E}_{yS}$, $\vec{\mathcal{H}}_S = -\vec{u}_z\mathcal{H}_{-zS}$ a jednotkové vektory $\vec{u}_P = \vec{u}_x$ resp. $\vec{u}_S = -\vec{u}_x$.

Ak rovinná vlna je špeciálnym prípadom riešenia rovnic VIII(2.13) v karteziánskej súradnicovej sústave vďaka jej výraznej (rovinnej) symetrii, zdalo by sa, že podobné riešenia môžeme očakávať pri symetrii poľa podľa bodu resp. podľa osi, a to v guľovej resp. valcovej súradnicovej sústave. Bolo by to v súlade so skúsenosťou, ktorú sme nadobudli v stacionárnom poli. Napríklad v guľovej (sférickej) súradnicovej sústave je operátor ∇^2, pri komplexnej skalárnej funkcii $\mathcal{f}(r)$ daný výrazom D(2.17), ktorý sa pri stredovej súmernosti zjednoduší takto

$$\text{div grad}\,\mathcal{f}(r) \equiv \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\mathcal{f}(r)}{\mathrm{d}r}\right)$$

keďže $\partial\mathcal{f}(r)/\partial\psi = 0$, $\partial\mathcal{f}(r)/\partial\vartheta = 0$, píšeme $\partial\mathcal{f}/\partial r \equiv \mathrm{d}\mathcal{f}/\mathrm{d}r$. Symbolom $\mathcal{f}(r)$ môže tu byť označený komplexný skalárny potenciál $\varphi(r)$, alebo karteziánske zložky komplexného vektorového potenciálu $\mathcal{A}_x(r), \mathcal{A}_y(r), \mathcal{A}_z(r)$. Pripomíname, že pre komplexný vektorový potenciál $\vec{\mathcal{A}}(r)$, by operátor $\nabla^2 \equiv \text{div grad}$ v sférickej (aj v cylindrickej) súradnicovej sústave viedol ku zložitejšej rovnici (pozri D(2.15)). Rovnica VIII(2.13) napríklad pre komplexný skalárny potenciál by potom bola

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \gamma^2\tilde{\varphi}(r) \qquad \text{VIII.(2.33)}$$

a priamo dosadením sa možno presvedčiť, že jej riešením, pri $r \neq 0$, je napríklad funkcia

$$\tilde{\varphi}(r) = \tilde{\varphi}_P\frac{e^{-\gamma r}}{r} + \tilde{\varphi}_S\frac{e^{\gamma r}}{r} \qquad \text{VIII.(2.34)}$$

avšak, z nej odvodené riešenia nebudú vyhovovať Maxwellovým rovniciam. Vo všeobecnosti je totiž $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(r,\vartheta,\psi)$, vlnová rovnica je komplikovanejšia a jej riešenie, pri ktorom treba použiť podobne ako sme to videli v stacionárnom poli metódu *separacie premennych,* ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(r,\vartheta,\psi) = \mathcal{R}(r)\mathcal{Y}(\vartheta,\psi)$) dá sa vyjadriť pomocou tzv. sférických funkcií. V špeciálnom prípade, blíži sa riešenie takejto *guľovej vlny* k závislosti, v ktorej je okrem funkcie $\mathcal{Y}(\vartheta,\psi)$, funkcia $\mathcal{R}(r)$ typu VIII(2.34). Riešenie zložitejších úloh, než aké predstavujú rovinné vlny už nespadá do našich zámerov. Aj keď skoro všetky prirovnania v istom zmysle "pokrivkávajú", uvedieme, že podobne, ako sa dá pomocou harmonických funkcií vyjadriť riešenie pri neharmonických priebehoch, možno zložitejšie prípady polí vyjadriť práve pomocou riešení typu rovinných vìn reprezentovaných exponencialnou závislosťou $e^{\pm\gamma x}$, kde *x* je patričná priestorová premenná. Základom riešenia polí vo všeobecnosti, je preto riešenie rovinných vĺn. Nakoniec pripomíname, že riešenie nehomogénných rovníc možno vyjadriť v tvare VIII(2.16) len pri nenulových zdrojoch $\vec{\mathcal{J}}_0(r), \tilde{q}_v(r)$. Riešenie homogénnych rovníc napr.VIII(2.18), alebo riešenia odvodené z potenciálov napr. VIII(2.34) prípadne VIII(2.36) možno vždy k riešeniam nehomogénnej rovnice pripočítať, keďže po dosadení do vlnovej rovnice VIII(2.14) *pridavaju* na jej pravú stranu "iba" nulu. Hodnoty príslušných konštánt (v prípade VIII(2.18) $\mathcal{E}_{P0}, \mathcal{E}_{S0}, \mathcal{H}_{P0}, \mathcal{H}_{S0}$, sú vždy určované okrajovými podmienkami danej úlohy a je samozrejmé, že sa môže stať aj to, že všetky budú nulové. Za všeobecné riešenie nehomogénnej vlnovej rovnice preto treba považovať súčet riešenia homogénnej rovnice a (partikulárneho) riešenia nehomogénnej rovnice. Riešenie daného problému sa potom "vyberá " z funkcií všeobecného riešenia nehomogénnej rovnice tak, aby boli splnené okrajové podmienky úlohy. To sme poznali už pri riešení stacionárných polí a iste si uvedomujete, že v komplexnej reprezentácii je riešenie rovníc netsacionárneho poľa analogické.

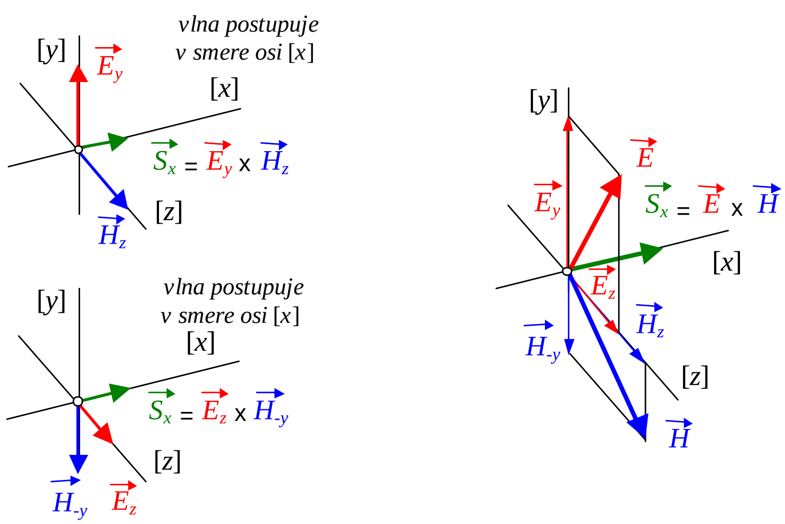
VIII.3. POYNTINGOV FÁZOR - VEKTOR

Poyntingov fázor-vektor harmonického poľa

V článku VII.2 sme vzťahom VII(2.5) zaviedli Poyntingov vektor, ktorého veľkosť predstavuje plošnú hustotu výkonu, prenášaného v smere jeho orietácie, elektromagnetickým poľom. Pri zmene vektora $\vec{S}(\vec{r},t)$ periódickej v čase, možno stanoviť cinny (wattový) výkon pomocou vzťahu VII(2.10). V článku VIII.1. sme definovali pojem harmonicke pole a prebrali sme spôsob komplexnej reprezentácie jeho veličín. Teraz nasleduje vyjadrenie výkonových pomerov v harmonicky sa meniacom elektromagnetickom poli, pri komplexnej reprezentácii jeho veličín. Dopredu poznamenávame, že postup tu bude podobný ako pri vyjadrovaní výkonu pomocou fázorov prúdu a napätia v elektrických obvodoch. Začnime výpočtom, v čase strednej hodnoty Poyntingovho vektora $\left\langle \vec{S}(\vec{r}) \right\rangle$, ktorá sa stanoví integráciou

$$\left\langle \vec{S}(\vec{r}) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{S}(\vec{r},t)\mathrm{d}t \qquad \text{VIII.(3.1)}$$

kde $\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$. Najjednoduchší prípad, ktorého by sa mohla týkať nasledujúca diskusia, je lineárne polarizovaná vlna. S istým zámerom, budeme sa tu však zaoberať všeobecnejším prípadom harmonického poľa s eliptickou polarizáciou. Nech podobne, ako to bolo v prípade diskutovanom predtým, zotrvávajú vektory $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{H}(\vec{r},t)$ v rovine $[y,z]$. Nemusíme mať pritom na mysli rovinnú vlnu, čo teraz povieme, nech sa vzťahuje na pole v ľubovoľnom bode s polohovým vektorom $\vec{r}$, pričom v susedných bodoch môže byť orientácia vektorov poľa odlišná. Z článku VIII.1 vieme, že v danom bode priestoru sa harmonické pole dá vždy vyjadriť pomocou dvoch navzájom kolmých zložiek. Nech teda je $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{u}_y E_y(\vec{r},t) + \vec{u}_z E_z(\vec{r},t)$ a $\vec{H}(\vec{r},t) = -\vec{u}_y H_{-y}(\vec{r},t) + \vec{u}_z H_z(\vec{r},t)$. Záporné znamienko pred zložkou intenzity magnetického poľa $H_{-y}(\vec{r},t)$ je tu nutné, lebo vlna je podľa vysloveného predpokladu elipticky polarizovaná. Dve lineárne polarizované vlny, z ktorých sa výsledné vlnenie skladá, postupujú totiž rovnakým smerom $\vec{u}_x$. Namiesto ďalšieho výkladu prezrite si podrobne obrázok obr.VIII.1. Pri vyšetrovaní elipticky polarizovaného vlnenia budeme dôsledne využívať princíp superpozície.



Obr.VIII.1. Na vysvetlenie Poyntingovho vektora

Ak by sa vám zdal postup neprehľadný, na jednu z lineárne polarizovaných zložiek výslednej vlny môžete v ktoromkoľvek kroku nasledujúcej úvahy (dočasne) zabudnúť. Keďže $\vec{u}_y \times \vec{u}_y = 0$, $\vec{u}_z \times \vec{u}_z = 0$, $\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x$, $\vec{u}_z \times \vec{u}_y = -\vec{u}_x$, máme

$$\vec{S} = S\vec{u}_x = \left[\vec{u}_y E_y + \vec{u}_z E_z\right] \times \left[\vec{u}_z H_z - \vec{u}_y H_{-y}\right] = \vec{u}_x \left[E_y H_z + E_z H_{-y}\right] \qquad \text{VIII.(3.2)}$$

keď sme v záujme stručnosti v zápise vynechali argument $(\vec{r},t)$ rovnaký pri každej zložke.

V poslednom výraze majú skalárne funkcie $E_y \equiv E_y(\vec{r},t),\ E_z \equiv E_z(\vec{r},t)$, $H_{-y} \equiv H_{-y}(\vec{r},t),\ H_z \equiv H_z(\vec{r},t)$ harmonický priebeh, takže napr $E_y \equiv E_{ym}(\vec{r})\cos\left(\omega t + \varphi_{Ey}(\vec{r})\right)$ $H_z \equiv E_{zm}(\vec{r})\cos\left(\omega t + \varphi_{Hz}(\vec{r})\right)$ atď.

Po rozpísaní VIII(3.2) s využitím vzorca $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{1}{2}E_{ym}H_{zm}\cos(\varphi_{Ey}-\varphi_{Hz}) + \frac{1}{2}E_{zm}H_{ym}\cos(\varphi_{Ez}-\varphi_{Hy}) + \\ &+ \frac{1}{2}E_{ym}H_{zm}\cos(\varphi_{Ey}+\varphi_{Hz}+2\omega t) + \frac{1}{2}E_{zm}H_{ym}\cos(\varphi_{Ez}+\varphi_{Hy}+2\omega t) \end{aligned} \qquad \text{VIII.(3.2)}$$

keď sme vynechali jednotkový vektor $\vec{u}_x$ u na oboch stranách rovnice a kvôli stručnosti nepíšeme ani argument ($\vec{r}$)

Po dosadení posledného výrazu do VIII(3.1) ľahko nájdeme:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \vec{u}_x\left[\frac{1}{2}E_{ym}H_{zm}\cos(\varphi_{Ey}-\varphi_{Hz}) + \frac{1}{2}E_{zm}H_{ym}\cos(\varphi_{Ez}-\varphi_{Hy})\right] \qquad \text{VIII.(3.3)}$$

keď si uvedomíme, že integrál z harmonickej funkcie za celú periódu je nula a stredná hodnota je totožná so zložkou v čase konštantnou. Bez dlhého odvádzania je jasné, že ak priradíme

$$\vec{E}(\vec{r},t) \leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{j\omega t} = \vec{u}_E E_m(\vec{r})e^{j\varphi_E}e^{j\omega t}$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) \leftrightarrow \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{j\omega t} = \vec{u}_H H_m(\vec{r})e^{j\varphi_H}e^{j\omega t}$$

každej z vyššie uvedených zložiek vektorov $\vec{E}$ a $\vec{H}$ (pritom sme tu označili jednotkové vektory v smere príslušnej zložky $\vec{u}_E = \vec{u}_z$ alebo $\vec{u}_y$, $\vec{u}_H = -\vec{u}_y$ alebo $\vec{u}_z$) bude

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{S}}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{E}}(t)\times\vec{\mathcal{H}}^*(t)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right\} \qquad \text{VIII.(3.4)}$$

keďže $\vec{\mathcal{H}}^*(t) = \vec{\mathcal{H}}^* e^{-j\omega t} = \vec{u}_H H_m e^{-j\varphi_H}e^{-j\omega t}$ je rotujúci fázor - vektor, komplexne združený (tiež konjugovaný) s rotujúcim fázorom-vektorom $\vec{\mathcal{H}}(t) = \vec{\mathcal{H}}e^{j\omega t} = \vec{u}_H H_m e^{j\varphi_H}e^{j\omega t}$. Vzťahom VIII(3.4) je definovali tzv. Poyntingov *fazor-vektor* alebo lepšie Poyntingov *komplexný vektor*, ktorého reálna časť predstavuje *strednú hodnotu* Poyntingovho vektora v harmonickom poli. Táto už (samozrejme) nie je funkciou času ! Zjavne

$$\vec{\mathcal{E}}(t)\times\vec{\mathcal{H}}^*(t) = \vec{\mathcal{E}}e^{j\omega t}\times\vec{\mathcal{H}}^*e^{-j\omega t} = \vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*$$

Keďže VIII(3.4) sa týka jednotlivých zloziek fázorov-vektorov $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{H}}$, v ľubovoľnom bode $\vec{r}$, stredná hodnota Poyntingovho vektora podľa VIII(3.2) vyjadrená pomocou fázorov-vektorov príslušných zložiek, bude

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{S}}_{yz} + \vec{\mathcal{S}}_{zy}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{E}}_y\times\vec{\mathcal{H}}_z^* + \vec{\mathcal{E}}_z\times\vec{\mathcal{H}}_{-y}^*\right\} \qquad \text{VIII.(3.5)}$$

Porovnaním VIII(3.4) s VIII(3.5) dostávame

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}_{yz} + \vec{\mathcal{S}}_{zy} \qquad \text{a tiež} \qquad \vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^* = \vec{\mathcal{E}}_y\times\vec{\mathcal{H}}_z^* + \vec{\mathcal{E}}_z\times\vec{\mathcal{H}}_{-y}^*$$

v súlade s VIII(3.2) $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_y + \vec{\mathcal{E}}_z$ a pri dodržaní konvencie $\vec{\mathcal{H}} = \vec{u}_H\mathcal{H}$ je: $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_z + \vec{\mathcal{H}}_y$. Podľa vysloveného predpokladu o eliptickej polarizácii, vo výraze VIII(3.6), sú $\vec{\mathcal{S}}_{yz}$ resp. $\vec{\mathcal{S}}_{zy}$ komplexné Poyntingove vektory zložiek vlnenia postupujúceho v smere osi [x]. V prípade zložitejšieho vlnenia, ak je možný jeho rozklad na lineárne polarizované vlny, bude výsledný výkon (jeho plošná hustota) daný súčtom výkonov jednotlivých (pomyselných) zložiek. Tak je to napríklad aj pri sčítaní postupnej a spätnej vlny, kedy $\vec{\mathcal{S}}_{yz}$ a $\vec{\mathcal{S}}_{zy}$, na rozdiel od diskutovaného prípadu, majú navzájom opačné znamienka (pretože tu jedna z vĺn sa šíri v smere $+\vec{u}_x$ a druhá v smere $-\vec{u}_x$). Musíme však upozorniť, že prostý súčet nemožno uplatniť vždy. Ako možno ukázať, nutnou podmienkou na to, aby bol výkon daný len jednoduchou superpozíciou, je paralelná, alebo antiparalelná orientácia Poyntingových vektorov odpovedajúcich jednotlivým zložkám vlmemia. Výraz VIII(3.5) zapísaný pre samotný Poyntingov fazor (teda nie komplexný vektor, resp. fázor-vektor), ktorý tu vždy viaže dva a dva v priestore navzájom kolmé vektory $\vec{E}_y \perp \vec{H}_z$ resp. $\vec{E}_z \perp \vec{H}_{-y}$ (pozri obr.VIII.1), je

$$\left\langle \mathcal{S} \right\rangle = \mathrm{Re}\left\{\mathcal{S}_{yz} + \mathcal{S}_{zy}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathcal{E}_y\times\mathcal{H}_z^* + \mathcal{E}_z\times\mathcal{H}_{-y}^*\right\} \qquad \text{VIII.(3.6)}$$

Tento výraz udáva strednú hodnotu plošnej hustoty výkonu prenášaného v smere osi [x] v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$.

Rezonančný stav elektromagnetického poľa.

Pristavme sa pri otázke, aká môže byť faza fázora $\mathcal{S}(\vec{r})$! Zrejme je $\mathcal{S}(\vec{r}) = S(\vec{r})e^{j\varphi_S}$, kde: $S(\vec{r}) = E_m(\vec{r})H_m(\vec{r})$ a $\varphi_S(\vec{r}) = \varphi_E(\vec{r}) - \varphi_H(\vec{r})$. Ak bude vlnenie, ktoré máme na mysli predstavovať rovinnu vlnu, môžeme podľa VIII(2.30) stotožniť fázový rozdiel $\varphi_S(\vec{r})$ s fázou chrakteristickej impedancie $\mathcal{Z} = Ze^{j\delta}$. Teda $\varphi_S = \varphi_E - \varphi_H = \delta$, pričom sa ľahko zistí, že : $0 < \delta < 45^\circ$, keď krajné prípady zodpovedajú hodnotám parametrov $\kappa = 0$ resp. $\kappa >> \omega\varepsilon$. Podobne, ako reálna resp. imaginárna časť fázora výkonu v elektrických obvodoch predstavovala činný (wattový) resp. jalový výkon, aj reálna resp. Imaginárna časť Poyntingovho fázora môže byť interpretovaná ako stredná hodnota plošnej hustoty wattového resp. jalového vykonu. Ale dôležitý rozdiel je v tom, že pokým v elektrických obvodoch je možné aby reálna časť fázora výkonu bola nulová (pri ideálnom kapacitore, alebo induktore, keď je fázový posun medzi prúdom a napätím $\pm\pi/2$), v elektromagnetickom poli, pri vlnení takého typu, ktoré je charakterizované impedanciou: $Ze^{j\delta}$, to je v našom prípade pri lineárnej polarizácii jedinej (postupnej alebo spätnej) vlny, môže byť fázový posun medzi fázormi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ maximálne $\pm\pi/4$ a preto imaginárna (jalová) zložka fázora $\mathcal{S}$ nemôže byť väčšia ako jeho reálna (činná) zložka, a na druhej strane, fázory $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ môžu byť vo fáze len ak $\kappa = 0$. Pri existencii postupnej aj spätnej zložky vlnenia alebo pri inom type ako pri rovinnej vlne, sú pravdaže pomery podstatne zložitejšie. V článku VII.2 sme ukázali, fyzikálny zmysel súčinu $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ a podľa D(2.02) - pozri tiež za vzťahom VII(2.3) - je $\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$. V čase stredná hodnota Poyntingovho vektora $\langle \vec{S} \rangle$ vyjadrená pomocou komplexných veličín je daná výrazom VIII(3.4). Keďže $\vec{S}$ má význam plošnej hustoty výkonu, stredná hodnota výkonu preneseného za periódu v ustálenom stave nejakou plochou *Σ* typu povrch (napr. mysleného) telesa smerom dnu alebo von, t.j. wattový výkon (*P*) v danom objeme *Ω* spotrebovaný, alebo produkovaný (napr.vysielacím zdrojom), bude daný reálnou časťou výrazu

$$P_W = \operatorname{Re}\left\{ \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}}\, \mathrm{d}v \right\} \qquad \text{VIII.(3.7)}$$

keď sme využili Gaussovu vetu D(2.11). Položíme si ešte otázku, čo reprezentuje imaginárna časť toho istého výrazu, tzv. jalovy výkon, ktorý označíme symbolom P_Q,

$$P_Q = \operatorname{Im}\left\{ \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} = \operatorname{Im}\left\{ \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}}\, \mathrm{d}v \right\} \qquad \text{VIII.(3.8)}$$

Podľa VII(3.5), $2 \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} = \operatorname{div}(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}}^*$. Pomocou dvoch z Maxwellových rovníc v komplexnom tvare, VIII(2.3): keď využijeme $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$ a tiež napíšeme $\vec{\mathcal{J}} = \kappa \vec{\mathcal{E}}$, máme $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = -j\omega\varepsilon\, \vec{\mathcal{H}}$, a $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = (\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}}$ ak prvú z nich budeme konjugovať, $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}}^* = (\kappa - j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}}^*$) dostaneme:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{1}{2}\left[-kE_m^2 + j\omega\left(kE_m^2 - kH_m^2\right) \right] \qquad \text{VIII.(3.9)}$$

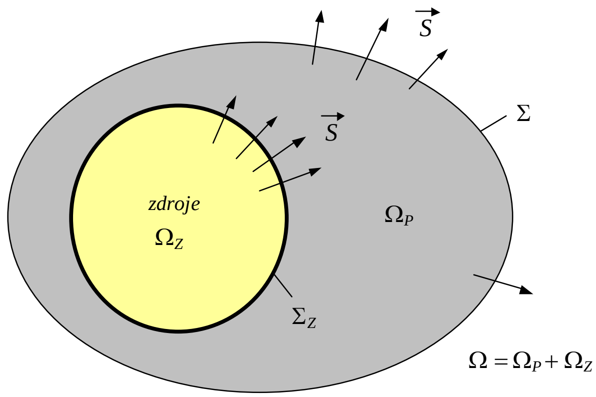
keď sme uvážili, že $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* = E_m^2$ a $\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^* = H_m^2$, pričom E_m^2 resp. H_m^2 sú štvorce amplitúd intenzity poľa v mieste $\vec{r}$.
Nech je objem $\Omega = \Omega_Z + \Omega_P$ ohraničený povrchom Σ, pričom povrch Σ_Z ktorý ohraničuje zdroj poľa je celý obsiahnutý vo vnútri Ω, podľa obr.VIII.2. Činný (watový) resp. jalový výkon zdroja P_{WZ} resp. P_{QZ} určíme integráciou VIII(3.7) resp. VIII(3.8) po ploche Σ_Z alebo v objeme Ω_Z , keď za $\operatorname{div} \vec{S}$ dosadíme z VIII(3.9). Činná a jalová zložka výkonu vyžiareného cez povrch Σ, ohraničujúci objem $\Omega = \Omega_Z + \Omega_P$ je zmenšená o straty v objeme Ω_P. Túto jednoduchú bilanciu zapíšeme nasledovne

$$P_{WZ} = \operatorname{Re}\left\{ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_Z} \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} = \underbrace{\frac{1}{2}\iiint_\Omega \kappa E_m^2 \mathrm{d}v}_{\Delta P_W} + \operatorname{Re}\left\{ \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} \qquad \text{VIII.(3.10)}$$

$$P_{QZ} = \operatorname{Im}\left\{ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_Z} \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} = \underbrace{\frac{\omega}{2}\iiint_{\Omega_P} (\varepsilon E_m^2 - \mu H_m^2) \mathrm{d}v}_{\Delta P_Q} + \operatorname{Im}\left\{ \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right\} \qquad \text{VIII.(3.11)}$$

Integrály po ploche Σ_Z predstavujú do objemu Ω_P "vžiarený" výkon a integrály po ploche Σ z neho vyžiarený výkon.

Objemové integrály, výkon stratený v objeme Ω_P. V časti objemu Ω_P, ktorý neobsahuje zdroje, sú $\langle w_e \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon E_m^2$ a $\langle w_m \rangle = \frac{1}{2}\mu H_m^2$, porovnaj s VII(2.1), v čase stredné objemové hustoty energie elektrického a magnetického poľa. Pri označení patričných stredných hodnôt energií $\langle W_e \rangle = \iiint w_e \mathrm{d}v$ resp. $\langle W_m \rangle = \iiint w_m \mathrm{d}v$ bude: $\Delta P_Q = P_{Qe} - P_{Qm} = \omega\left(\langle W_e \rangle - \langle W_m \rangle\right)$ a Jouleove straty resp. wattový výkon v objeme Ω_P , $\Delta P_W = \frac{1}{2}\iiint \kappa E_m^2 \mathrm{d}v$. Taký proces v elektromagnetickom poli, keď je úbytok jalového výkonu (ΔP_Q) v danom objeme Ω_P, neobsahujúcom zdroje, nulový - nazýva sa rezonancia (v danom objeme). Definícia, ktorú možno vztiahnúť aj na prípad elektrických obvodov, je však všeobecnejšia ako známe kritérium súfáznosti fázorov napätia a prúdu. Pripomenieme, že v elektrických obvodoch so sústredenými parametrami môžu byť prúd aj napätie interpretované ako systémové veličiny ktorých lokalizácia v priestore, nemá, na rozdiel od veličín poľa (prípadne obvodov s rozloženými parametrami), žiadny zmysel.



Obr.VIII.2. Energetická bilancia

V elektromagnetickom poli, ako sme práve spoznali, je rezonančný stav viazaný na splnenie integrálnej podmienky v čase i priestore. Požaduje sa nulovosť jalového výkonu v rámci objemu Ω_P (ktorý sa môže rozprestierať až do nekonečna). Tomu odpovedá v elektrickom obvode súčet jalových výkonov na kapacitore a induktore, o ktorých sa v prípade obvodov so sústredenými parametrami predpokladá, že v každom z nich sa akumuluje len jeden druh energie. Na kapacitore elektrická, na induktore magnetická. V elektromagnetickom poli a v obvodoch s rozloženými parametrami, nie je možné presne vymedziť
takéto oddelené časti objemu, a v každom bode priestoru má zmysel hovoriť len o objemovej hustote energie w, ktorú formalne (tam kde je to výhodné) môžeme interpretovať súčtom $w = w_e + w_m$. Pokiaľ je však možné v objeme Ω_P rozlíšiť časti s prevažujúcim charakterom elektrického alebo magnetického poľa, môže sa stať modelom takej sústavy dvojica prvkov so sústredenými parametrami, totiž práve kapacitor a induktor ako ich poznáme v teórii elektrických obvodov. Kvalitou rezonančnej sústavy sa v takomto prípade rozumie podiel absolutnej hodnoty jalového výkonu jedného z "prvkov" (systém je konzervatívny t.j. zachováva sa v ňom energia) k činnému výkonu stratenému v objeme celej sústavy,
teda

$$K = \frac{\omega\langle W_e \rangle}{\Delta P_W} = \frac{\omega\langle W_m \rangle}{\Delta P_W} = \frac{P_{Qe}}{\Delta P_W} = \frac{P_{Qm}}{\Delta P_W} \qquad \text{VIII.(3.12)}$$

kde $P_{Qe} = \omega W_e$ je jalový výkon "kapacitného prvku" a $P_{Qm} = \omega W_m$ je jalový výkon "induktívneho prvku" a obidva výkony sú rovnaké (keďže $\Delta P_Q = 0$). Odoporúčamme overiť si uvedené vzťahy na príklade paralelného rezonančného obvodu tvoreného ideálnym kapacitorom a ideálnym induktorom so sústredenými parametrami, kedy je elektrické a magnetické pole, viazané na dva rozličné elementy a zdroj nedodáva ani jalový ani činný výkon a kvalita obvodu (K) rastie pritom cez všetky medze.

VIII.4. KOMPLEXNÁ PERMITIVITA A PERMEABILITA

Komplexna permitivita a permeabilita pri harmonickom priebehu velicin.

Pri doterajších úvahách, ktoré sa týkali elektromagnetickéhopoľa v priestore vyplnenom látkou, predpokladali sme *linearitu, homogenitu a izotrópnosť* prostredia. Pri splnení uvedených podmienok, sme považovali ε, μ a κ za konštanty. Vychádzali sme pritom z tvrdenia, že v prostredí s nulovou vodivosťou nedochádza k premene elektromagnetickej energie na tepelnú energiu a takéto prostredie sme označovali prívlastkami idealne dielektrikum, alebo idealne magnetikum, alebo sme o ňom hovorili ako o bezstratovom prostredí. Prísne vzaté, dopúšťali sme sa tým istej nepresnosti, ktorá nie je zdrojom nezrovnalostí medzi teóriou a experimentom spravidla len vtedy, ak sa elektromagnetické pole v čase mení dostatočne pomaly na to, aby sa neuplatnili tzv. disperzné vlastnosti daného prostredia. V nasledujúcich úvahách sa sústredíme najmä na prípady harmonickeho elektromagnetického poľa, hoci je samozrejmé, že disperzia sa prejaví i pri neharmonickej časovej zmene veličín. Pri harmonicky sa meniacom poli hovoríme o disperzii, ak parametre ktoré nazývame permitivita a permeabilita sú frekvenčne závislé, a to tak, že v rovniciach s komplexnou reprezentáciou veličín pomocou fázorov-vektorov, sú príslušné parametre $\tilde{\varepsilon} \equiv \tilde{\varepsilon}(\omega)$, $\tilde{\mu} \equiv \tilde{\mu}(\omega)$ nielen funkciami frekvencie, ale vo všeobecnosti sú aj komplexné. Potom - porovnaj s VIII(2.6) - máme

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r},\omega) &= \kappa\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega) \\ \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega) &= \tilde{\varepsilon}(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{r},\omega) \\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega) &= \tilde{\mu}(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega) = \mu_0\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega) + \mu_0\vec{\mathcal{M}}(\vec{r},\omega) \end{aligned} \qquad \text{VIII.(4.1)}$$

o tom, že nepredpokladáme závislosť κ od frekvencie, teda že $\kappa \neq \tilde{\kappa}(\omega)$ sa zmienime na inom mieste. Očakávame pritom, že za disperzné vlastnosti sú tu, pozri VIII.(2.6), zodpovedné polarizácia a magnetizácia prostredia, reprezentované fázormi-vektormi $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r},\omega)$, $\vec{\mathcal{M}}(\vec{r},\omega)$, teda dve veličiny, ktoré charakterizujú látku, vypĺňajúcu uvažovaný priestor

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r},\omega) &= \varepsilon_0\tilde{\chi}_E(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \\ \vec{\mathcal{M}}(\vec{r},\omega) &= \tilde{\chi}_M(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) \end{aligned} \qquad \text{VIII.(4.2)}$$

Permitivita vákua $\varepsilon_0 = 8.8543\times10^{-12}$ F/m aj permeabilita vákua $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m, sú totiž univerzálne (a preto aj frekvečne nezávislé) konštanty a disperzia sa prejavuje frekvenčnou závislosťou dielektrickej komplexnej susceptibility $\tilde{\chi}_E = \tilde{\chi}_E(\omega)$ resp. magnetickej komplexnej susceptibility $\tilde{\chi}_M = \tilde{\chi}_M(\omega)$. Kombináciou VIII(4.1) a VIII(4.2) máme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\omega) &= \tilde{\varepsilon}(\omega)\mathcal{E} = \varepsilon_0\underbrace{\left[1+\tilde{\chi}_E(\omega)\right]}_{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}\mathcal{E} \\ \mathcal{B}(\omega) &= \tilde{\mu}(\omega)\mathcal{H} = \mu_0\underbrace{\left[1+\tilde{\chi}_M(\omega)\right]}_{\tilde{\mu}_r(\omega)}\mathcal{H} \end{aligned} \qquad \text{VIII.(4.3)}$$

keď sme vynechali symboly znázorňujúce vektrový charakter veličín (predpokladáme izotrópne prostredie) a kvôli stručnosti vypustili sme aj formálny zápis polohovej premennej $\vec{r}$. Podľa vyššie uvedených vzťahov treba považovať príslušným komplexným veličinám odpovedajúce reálne funkcie $\vec{E}(\vec{r},t)$ resp. $\vec{H}(\vec{r},t)$ za budiace veličiny (teda príčinu) a $\vec{P}(\vec{r},t)$ resp. $\vec{M}(\vec{r},t)$ a odtiaľ aj $\vec{D}(\vec{r},t)$ resp. $\vec{B}(\vec{r},t)$ za vyvolané, veličiny (teda následok). Predpokladáme teda, že $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r},t)$ resp. $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{H}(\vec{r},t)$ predstavujú nezávislé, primárne veličiny. Bez zachádzania do podrobností uvedieme, že toto môže platiť iba v lineárnom, nekonečne rozľahlom, homogénnom a izotrópnom prostredí, kde zaznamenávame len závislosti typu $\vec{P} \equiv \vec{P}(\vec{E})$ a $\vec{M} \equiv \vec{M}(\vec{H})$ a kde nie je vzájomné spätné ovplyvanie, teda $\vec{E}$ nezávisí od $\vec{P}$ a vektor $\vec{H}$ nezávisí od poľa $\vec{M}$ - čo vo všeobecnosti nemusí byť splnené. Pri harmonicky sa meniacom poli, ak použijeme komplexnú reprezentáciu veličín, je zavedenie $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ a $\tilde{\mu}(\omega)$ ako frekvenčne závislých parametrov zrozumiteľné. Na rozdiel od prvej z rovníc VIII(4.1), kde podiel $\mathcal{J}(\omega)/\mathcal{E}(\omega) = \kappa = konšt.$, sú podiely $\mathcal{D}(\omega)/\mathcal{E}(\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)$ a $\mathcal{B}(\omega)/\mathcal{H}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega)$ funkciami frekvencie. Znamená to, že pokým $J(t)$ a $E(t)$ sú vo fáze, medzi $D(t)$ a $E(t)$ a tak isto aj medzi $B(t)$ a $H(t)$ v každom bode priestoru $\vec{r}$, je možný fázový posun, a jeho hodnota závisí od frekvencie. Napríklad závislosť $B(H)$ tzv. hysterézna sľučka má v takomto prípade tvar elipsy, ktorej plocha je tým väčšia, čím väčší je fázový posun, a táto sľučka degeneruje na úsečku práve pri jeho nulovej hodnote. Zdôraznime, že prostredie je podľa predpokladu linearne, le napriek tomu, magnetický materiál vykazuje hysterézu. Väčšina v praxi významných magnetických materiálov, ako vieme je nelineárna, takže súčasne nemôžu byť veličiny $B(t)$ aj $H(t)$ v žiadnom bode $\vec{r}$ harmonické. Avšak s istou presnosťou ich možno za určitých okolností (malé sýtenie, t.j. hodnota B a vyššia frekvencia magnetovania), za také považovať. Práve v takých prípadoch má zavedenie pojmu komplexnej permeability praktický význam. Cyklus, v ktorom pod účinkom magnetického poľa $H(t)$ prechádza látka stavmi, odpovedajúcimi jednotlivým bodom tu elipsy $B(H)$, je z termodynamického hľadiska nevratný, čo znamená, že plocha tejto elipsy je priamoúmerná stratám v procese premagnetovania. Prostredie treba preto považovať za stratové aj vtedy, ak $\kappa = 0$. Podobná úvaha sa pravdaže môže týkať aj nelineárneho, alebo lineárneho dielektrika a jeho závislosti $D(E)$. Komplexná permitivita, permeabilita charakterizuje, podľa tu uvedeného, istý špecifický proces (harmonické pole), a podľa VIII(4.3) možno v izotropnom prostredí, kde $\vec{D} \parallel \vec{E}$ alebo $\vec{B} \parallel \vec{H}$ (čo tu pravdaže predpokladáme), písať

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \frac{\mathcal{D}(\omega)}{\mathcal{E}(\omega)} = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$$
$$\tilde{\mu}(\omega) = \frac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{H}(\omega)} = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega) \qquad \text{VIII.(4.5)}$$

keď sme z istých dôvodov, definične položili znamienko minus medzireálnu a imaginárnu zložku v oboch prípadoch. Už zbežný pohľad na výrazy VIII(4.5) nás privádza k myšlienke, že ak je $\varepsilon''(\omega)$ alebo $\mu''(\omega)$ nulové, t.j. ak sú fázory $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}$ alebo $\mathcal{B}$ a $\mathcal{H}$ vo fáze (pôvodne komplexna konštanta sa stáva reálnou), degenerujú hysterézne slučky $D(E)$ resp. $B(H)$ na priamky, majú „nulovú plochu“ a prostredie sa stáva bezstratovým, napriek tomu, že má aj naďalej disperzný charakter $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega)$ resp. $\mu(\omega) = \mu'(\omega)$ .Tento teoreticky možný prípad, je však od reality značne vzdialený. Je jasné, že imaginárne časti komplexnej permitivity $\varepsilon''(\omega)$ apermeability $\mu''(\omega)$ sú mierou strat v procese prepolarizácie alebo premagnetovania, opäť zdôrazňujeme, pri harmonickom priebehu oboch veličín budiacej $E(t)$ resp. $H(t)$ aj vyvolanej $D(t)$ resp. $B(t)$. Mohli by sme podľahnúť ilúzii, že otázka disperzných vlastností je jednoduchý problém, keď sme ho tak ľahko (v harmonickom poli) zvládli. Pokúsme sa však odpovedať na otázku aká je závislosť medzi $D(t)$ a $E(t)$ resp. medzi $B(t)$ a $H(t)$, ak sa veličiny poľa nemenia harmonicky.

<u>*Komplexná reprezentácia a vzťahy medzi vektormi $\vec{E},\vec{D}$ resp. $\vec{B},\vec{H}$ pri neharmonickom časovom priebehu*</u>

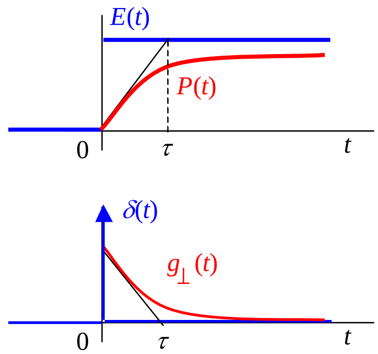
Tento problém nebudeme riešiť podrobne, jeho riešenie len naznačíme a opäť v izotrópnom prostredí, t.j. symboly naznačujúce vektorový charakter veličín možeme vynechať (pracujeme so skalármi). Vyšetrime najprv prípad, kedy sa napríklad v dielektriku skokom zmení intenzita elektrického poľa z nuly na konštantnú hodnotu $E_\infty(t)$

$$E_\infty(t) = E_\infty \boldsymbol{1}(t) \qquad \text{VIII.(4.6)}$$

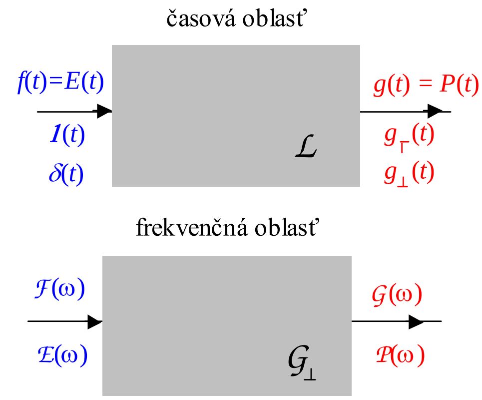
Očakávajme (!), že aj teraz sa bude meniť polarizácia v súlade so vzťahom $P(t) = \varepsilon E(t) = \varepsilon_0 \chi_E E(t)$. Čo by však repezetntoval symbol ε resp. χ_E? Keby bolo ε resp. χ_E konštantné, sledovala by polarizácia $P(t)$ okamžite (bez oneskorenia) zmenu intenzity poľa $E(t)$. V skutočnosti bude ale zmena polarizácie $P(t)$ viac, alebo menej zaostávať za zmenou budiacej veličiny $E(t)$ a to spôsobom, ktorý sa bude od prípadu k prípadu meniť. Pravdepodobne najjednoduchší model procesu polarizácie vyvolanej skokovou zmenou VIII.(4.6) môže sa teda zakladať na predpoklade časovej zmeny (s jednou časovou konštantou) napríklad typu

$$P(t) = P_\infty \left[1 - e^{-t/\tau}\right] \boldsymbol{1}(t) \qquad \text{VIII.(4.7)}$$

Možno si predstaviť, že VIII(4.7) je aproximáciou výsledku experimentálneho vyšetrovania. Oba časové priebehy $E(t)$ aj $P(t)$ sú nakreslené na obr.VIII.3. V takomto prípade ovšem vzťah $P(t) = \varepsilon E(t)$ neobstojí (!) museli by sme totiž pripustiť, že v ňom vystupujúce $\varepsilon = \varepsilon(t)$ je funkciou času, a naviac pre každý časový priebeh $E(t)$ inou. Čitateľ iste sám nájde niekoľko podobných príkladov známych z teórie elektrických obvodov s prechodným javom opísaným rovnicou typu VIII(4.7). Práve poznatky o lineárnych sústavách, ktoré sme získali v teórii obvodov, možno teraz uplatniť pri riešení nastoleného problému.



Obr.VIII.3



Obr.VIII.4

Stotožnime $E(t) \equiv f(t)$ so vstupnou veličinou lineárnej sústavy a $P(t) \equiv g(t)$ s jej výstupom, obr. VIII.4. Pri skokovej zmene vstupnej veličiny podľa VIII(4.6), ak $E_\infty = 1$, predstavuje výraz VIII(4.7) odozvu sústavy známu ako *prechodová charakteristika*.

$$g_{\Gamma}(t) = \frac{P_\infty}{E_\infty}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]\boldsymbol{1}(t) \qquad \text{VIII.(4.8)}$$

kde sme označili symbolom P_∞ ustálenú hodnotu, ktorú dosiahne polarizácia po skončení prechodného javu. Deriváciou VIII(4.7) dostaneme tzv. *impulznú charakteristiku*

$$g_{\perp}(t) = \frac{P_\infty}{E_\infty}\left[\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\boldsymbol{1}(t) + \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\delta(t)\right]\boldsymbol{1}(t) = \frac{P_\infty}{E_\infty}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\boldsymbol{1}(t) = \varepsilon_0\chi_{E0}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\boldsymbol{1}(t)$$

ktorá po uvážení, že $\delta(t)$ je nulové všade s výnimkou bodu $t = 0$, kde je zasa nulový výraz $(1 - e^{-t/\tau})$, sa zjednoduší tak ako je uvedené vyššie. V súlade s výrazom VIII(4.2) označili sme ďalej $P_\infty / E_\infty = \varepsilon_0\chi_{E0}$, kde χ_{E0} - je konštanta, ktorej zmysel vyplýva napr. aj z obr.VIII.3. Fourierova transformácia impulznej charakteristiky, tzv. *prenos* lineárnej sústavy je potom - pozri D( ).

$$\mathcal{G}_{\perp}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\perp}(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon_0\chi_{E0}}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{VIII.(4.9)}$$

Keďže medzi obrazom vstupného priebehu $\mathcal{F}(\omega)$, prenosom $\mathcal{G}_{\perp}(\omega)$ a obrazom výstupného priebehu $\mathcal{G}(\omega)$ platí vzťah: $\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}_{\perp}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$, je

$$\mathcal{G}_{\perp}(\omega) = \frac{\mathcal{G}(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} = \frac{\mathcal{P}(\omega)}{\mathcal{E}(\omega)} = \varepsilon_0\chi_E(\omega)$$

a porovnaním posledného vzťahu s VIII(4.9) a so zreteľom naVIII(4.3) a VIII(4.5) dostávame

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0\left[1 + \frac{\chi_{E0}}{1 + j\omega\tau}\right] \qquad \text{VIII.(4.10)}$$

odkiaľ vyjadríme zložky komplexnej permitivity pri modeli s odozvou typu VIII(4.6) na skokovú zmenu budiacej veličiny (intenzity) podľa VIII(4.5).

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0\left[1 + \frac{\chi_{E0}}{1 + (\omega\tau)^2}\right], \qquad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0\chi_{E0}\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \qquad \text{VIII.(4.11)}$$

Priebeh disperzných závislostí podľa VIII(4.11) je na obr.VIII.4 pri zvolenej hodnote $\chi_{E0} = 1$ (t.j. pri $\omega \to 0$ je $\varepsilon' = 2\varepsilon_0$).

Možno len privítať, že tieto závislosti sa dajú odvodiť zo známej prechodovej charakteristiky, ktorá sa experimentálne ľahko stanoví. V prípade harmonického priebehu veličín bude fázový posuv medzi $\mathcal{D}(\omega)$ a $\mathcal{E}(\omega)$ daný výrazom VIII(4.10), podľa ktorého

$$\frac{\mathcal{D}(\omega)}{\mathcal{E}(\omega)} = \tilde{\varepsilon}(\omega) = \left|\tilde{\varepsilon}(\omega)\right| e^{j\delta_E(\omega)} = \varepsilon(\omega)\angle\delta_E(\omega), \qquad \delta_E(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$$

Nakoniec môžeme vyjadriť aj závislosť medzi $D(t)$ a $E(t)$ pri ľubovoľnom časovom priebehu veličín poľa. So zreteľom na vzťah $D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P(t)$, stačí, ak bude známy súvis veličín $P(t)$ a $E(t)$. Vieme, že súčinu obrazov $\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{G}_{\perp}(\omega)\mathcal{E}(\omega)$ odpovedá konvolúcia originálov

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) g_{\perp}(t-\xi) d\xi$$

kde $g_{\perp}(t) = \dfrac{\mathrm{d}g_{\ulcorner}(t)}{\mathrm{d}t}$ - pozri VIII.(4.8) pri skokovej zmene intenzity (aplikovaného) elektrického poľa. Podľa VIII(4.5) a VIII(4.7) je vo všeobecnosti $g_{\perp}(t) = \dfrac{P_\infty}{E_\infty}\left[\Psi'(t)\mathbf{1}(t) + \Psi(t)\delta(t)\right]$. Pričom $\Psi(t)$ je skalárna funkcia, ktorá závisí od vlastností prostredia. Po kratšej úprave, keď využijeme vlastnosti $\delta(t)$ funkcie - pozri D( ), máme

$$P(t) = \frac{P_\infty}{E_\infty}\int_{-\infty}^{t} E(t)\Psi'(t-\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{P_\infty}{E_\infty}\left[E(t)\Psi(0) + \int_0^t E(t)\Psi'(t-\xi)\mathrm{d}\xi\right] \qquad \text{VIII.(4.12)}$$

V tu diskutovanom prípade, pri $\Psi(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ podľa VIII(4.7), je $\Psi(0) = 0$ a na základe VIII(4.12) dostaneme

$$P(t) = P_\infty \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\int_0^t \frac{E(\xi)}{E_\infty} e^{\xi/\tau}\mathrm{d}\xi \qquad \text{VIII.(4.13)}$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že pri $E(t)$ podľa VIII(4.5), bude polarizácia VIII(4.13) zhodná s výrazom $P(t)$ podľa VIII(4.6).V disperznom prostredí je vzťah medzi $D(t)$ a $E(t)$ daný prostredníctvom výrazu VIII(4.12) a jednoduchá koncepcia permitivity ako sme ju poznali vo vztahu typu $D(t) = \varepsilon E(t)$ tu nie je adekvátna. V prípade harmonicky sa meniaceho poľa možno pracovať s komplexnou permitivitou VIII(4.3) resp. VIII(4.5), avšak táto vzájomne viaže príslušné fázory (prípadne fázory-vektory), $\mathcal{D}, \mathcal{E}$, alebo Fourierovské komponenty spektra $\mathcal{D}(\omega), \mathcal{E}(\omega)$. Podiel $D(t)/E(t)$ je pri harmonických priebehoch oboch veličín,ak tieto nie sú vo fáze, komplikovanou funkciou času. Tento podiel sa stane konštantným práve vtedy, ak je $\varepsilon''(\omega) = 0$, teda ak sa *komplexná* permitivita stane reálnym čislom, k čomu dochádza len v tzv. bezstratovom prostredí. Aj v takomto prípade však treba hovoriť o disperzii, keď je permitivita $\tilde{\varepsilon}(\omega) \equiv \varepsilon'(\omega)$ frekvenčne závislou veličinou, napr. podľa VIII(4.11). Všetko, čo tu bolo povedané o permitivite, sa pochopiteľne plne vzťahuje aj na permeabilitu. O meraní komplexnej permeability sa čitateľ dozvie napr. v [5].

Jednoduchá fyzikálna teoria disperzie v dielektrickom prostredí pochádza od Lorentza a zakladá sa na predstave molekulárnych oscilátorov, (pozri napr.[7]) Ak sa tu odvoláme na vzťah VIII(4.6), ktorý opisuje prechodný jav napríklad v obvode typu *RC,* alebo *RL*, je jasné, že prechodný jav oscilačného charakteru v obvode typu *RLC* bude adekvátny (môže byť analogom) sústave molekulárnych oscilátorov. Pritom budiace napätie pripojené na sériovú *RLC* kombináciu odpovedá budiacej veličine, intenzite poľa: $u(t) \leftrightarrow E(t)$, a náboj zhromaždený na jednej z dosiek kondezátora $Q(t) \leftrightarrow P(t)$ odpovedá polarizácii dielektrika. Po pripojení jednosmerného napätia, ustáli sa náboj na kondenzátore analogicky ako polarizácia dielektrika po jeho vložení do jednosmerného statického poľa E . Napäťový Kirchhoffov zákon v takomto obvode, s uvážením vzťahu $i(t) = \mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t$ vedie k rovnici

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = u \qquad (*)$$

ktorej riešnie, pri harmonickom priebehu $u = u(t)$ v komplexnej reprezentácii $Q(t) \leftrightarrow \tilde{Q},\ u(t) \leftrightarrow \mathcal{U}$, je z teórie obvodov veľmi dobre známe

$$\tilde{Q} = \frac{1}{L} \frac{\mathcal{U}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC}}$$

Označíme $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $g = R/L$ a $a_0^2 = 1/L$, a na základe analógie $\tilde{Q} \leftrightarrow \mathcal{P}$, resp. $\mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{E}$, dostávame vzťah známy ako Lorentzov disperzný zákon

$$\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{E}(\omega) \frac{a_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega g} \qquad (*)$$

Ponechávame na čitateľa, aby sa pokúsil riešením rovnice (*) pri $u(t) = U\mathbf{1}(t)$, napríklad pomocou operátorového počtu, stanoviť prechodovú a impulznú charakteristiku, a z nich aj ostatné vzťahy podobne, ako sme to urobili pri zjednodušenom ("*RC*") modeli podľa VIII(4.6) vyššie. Podotýkame, že prenos sústavy je tentokrát známy, je to vzťah (**). A nakoniec, sľúbená poznámka o vodivosti κ. Vo výrazoch VIII(4.1) vystupuje vodivosť prostredia κ ako konštanta. V oblasti optických kmitov (frekvencie ~ 10^{16} Hz) možno opäť, na základe relatívne jednoduchého modelu, dospieť k rovnici typu (*) v ktorej však nevystupuje člen bez derivácie (model akoby "*RL*"), pozri napr. [1] . Jej riešenie vedie ku vzťahu

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \kappa'(\omega) - j\kappa''(\omega) = \kappa\left[\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} - j\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\right]$$

podľa ktorého disperznému zákonu podlieha aj vodivosť. Pri $\omega \to 0$, je pravdaže $\tilde{\kappa}(\omega) \to \kappa$. Porovnaj výraz VIII(4.11) ! Iste tu netreba zvlášť zdôrazňovať, že pri započítaní disperných vlastností prostredia, môže sa konštanta šírenia vĺn a jej zložky vyznačovať pomerne zložitou frekvenčnou závislosťou

$$\gamma^2(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\omega\mu(\omega)\left[\kappa(\omega) + j\omega\varepsilon(\omega)\right]$$
$$\alpha(\omega) = \omega\mu''\left(\omega\varepsilon'' + \kappa'\right) - \omega\mu'\left(\omega\varepsilon' + \kappa''\right)$$
$$\beta(\omega) = \omega\mu''\left(\omega\varepsilon' - \kappa''\right) + \omega\mu'\left(\omega\varepsilon'' + \kappa'\right)$$

pričom veličiny $\kappa' = \kappa'(\omega)$, $\kappa'' = \kappa''(\omega)$ ', $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon'' = \varepsilon''(\omega)$, $\mu' = \mu'(\omega)$, $\mu'' = \mu''(\omega)$ sú tiež funkciami frekvencie. Na záver poznamenajme, že medzi reálnou a imaginárnou zložkou permitivity resp. permeability a aj vodivosti, existuje určitý vzťah, tieto zložky nie sú nezávislé (sú viazané tzv. Hilbertovou transformáciou). Vzťahy, známe v tejto súvislosti pod menom relácie Kramersa-Kröninga, tu ale nebudeme podrobnejšie rozoberať. Iste postačí, ak priamo z VIII.(4.11) po vzájomnom dosadení z druhého výrazu do prvého, ukážeme že: $\varepsilon_r' - \frac{\varepsilon_r''}{\omega\tau} = 1$. Samozrejme tento vzťah je viazaný na jednoduchý model so závislosťou VIII.(4.7) a nemá teda všeobecnú platnosť.

Vrátime sa ešte krátko k analógii vlnovej konštanty γ na homogénnom vedení, VIII.(2.23) a vo voľnom priestore v prípade stratového dielektrika a magnetika pri frekvencii, kedy nožno disperziu vodivosti zanedbať

$$\gamma^2 = \alpha + j\beta = j\omega\tilde{\mu}\left[\kappa + j\omega\tilde{\varepsilon}\right] = j\omega(\mu' - j\mu'')\left[\kappa + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\right]$$
$$\gamma^2 = \alpha + j\beta = \left[\omega\mu'' + j\omega\mu'\right]\left[\underbrace{\kappa + \omega\varepsilon''}_{\text{vodivosť}} + j\omega\varepsilon'\right] \leftrightarrow \left[R_0 + j\omega L_0\right]\left[G_0 + j\omega C_0\right]$$

teraz zjavne dospievame k vzťahom

$$\underset{(\Omega/\text{m})}{R_0 \leftrightarrow \omega\mu''}, \quad \underset{(\text{H/m})}{L_0 \leftrightarrow \mu'}, \quad \underset{(\text{S/m})}{G_0 \leftrightarrow \kappa + \omega\varepsilon''}, \quad \underset{(\text{F/m})}{C_0 \leftrightarrow \varepsilon'},$$

v ktorých už „nič nechýba“ a analogická veličina odporu vedenia na jednotku dĺžky su frekvenčne závislé magnetizačné straty. Súčasne si povšimnime, že straty polarizáciou (tiež frekvenčne závislé) sa „pridávajú“ k vodivostným stratám .

* * *