VII. DYNAMICKÉ ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

II.1. MAXWELLOVE ROVNICE.

• Posuvný prúd a rovnica kontinuity • Maxwellove rovnice a vlnová rovnica vo vákuu • Maxwellove rovnice v prostredí vyplnenom látkou • Lorentzova teória mikroskopického poľa

VII.2. ENERGIA POĽA.

• Poyntingov vektor a rovnica kontinuity • Vyžarovanie Energie • Výkon a Jouleove straty

VII.3. VLNOVÉ ROVNICE.

• Skalárny a vektorový dynamický potenciál • Vlnové rovnice pre dynamické potenciály • Lorentzova podmienka • Riešenie vlnovej rovnice v bezstratovom prostredí • Retardované potenciály • Hertzove vektory

V nasledujúcom texte budeme používať podľa okolností explicitné - alebo stručnejšie, implicitné označovanie časovo-priestorových veličín. V každom prípade však treba mať na pamäti, že vždy:

• budiace veličiny lokalizované v objeme (Ω) alebo na ploche (Σ):

$Q_{v\Omega} \equiv Q_{v\Omega}(t), I_{v\Sigma} \equiv I_{v\Sigma}(t)$ - sú funkcie času

• objemové či plošné hustoty budiacich veličín:

$q_v \equiv q_v(\vec{r},t), \vec{J}_v \equiv \vec{J}_v(\vec{r},t)$ - sú funkcie polohy a času

• vektory intenzity a hustoty toku elektrického aj magnetického poľa

$\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r},t), \vec{H} \equiv \vec{H}(\vec{r},t), \vec{D} \equiv \vec{D}(\vec{r},t), \vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r},t)$ - sú funkcie polohy a času

• skalárny, vektorový potenciál aj Hetzove vektory

$\varphi \equiv \varphi(\vec{r},t), \vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r},t), \vec{\Pi} \equiv \vec{\Pi}(\vec{r},t),$ – sú funkcie polohy a času

VII.1. MAXWELLOVE ROVNICE

Posuvný prud a rovnica kontinuity

Pri vyšetrovaní statických polí sme poznali, že základné zákony, možno zhrnúť do štyroch diferenciálnych rovníc (zapíšeme ich po dvojiciach), pre dva druhy polí

$$\begin{array}{ll} \textit{elektrické pole}: & \textit{magnetické pole}: \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 & \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v \\ \mathrm{div}\vec{D} = q_v & \mathrm{div}\vec{B} = 0 \end{array} \qquad \text{VII.(1.1)}$$

Pri konštantných hodnotách ε a μ, t.j. v homogénnom a v lineárnom prostredí, ak uvážime vzťahy $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ a $\vec{B} = \mu\vec{H}$, dostaneme rovnice

$$\begin{array}{ll} \mathrm{rot}\vec{D} = 0 & \mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}_v \\ \mathrm{div}\vec{D} = q_v & \mathrm{div}\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 & \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v \\ \mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{q_v}{\varepsilon} & \mathrm{div}\vec{H} = 0 \end{array} \qquad \text{VII.(1.2)}$$

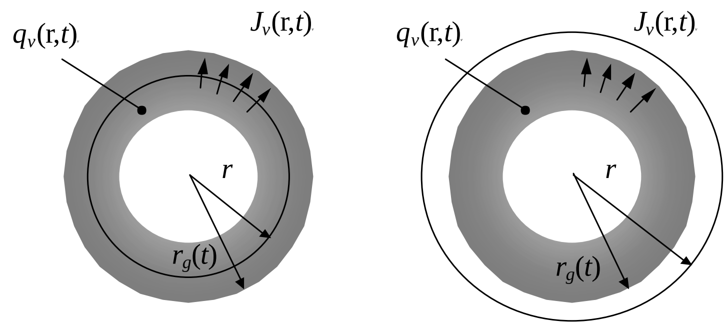
Podľa nich, pole ľubovoľného z vektorov $\vec{D} \equiv \vec{D}(\vec{r}),\ \vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r}),\ \vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r}),\ \vec{H} \equiv \vec{H}(\vec{r})$ bude určené, ak bude daná jeho rotacia a jeho divergencia. Pravé strany rovníc obsahujú zdrojové veličiny, ktoré sú bezprostrednou (hneď poznáme, že nie jedinou) príčinou existencie jednotlivých polí: objemová hustota voľného elektrického náboja q_v (C/m^3) a plošná hustota vodivostného prúdu J_v (A/m^2). Ak je v každom bode priestoru nulová aj divergencia aj rotácia (t.j. $q_v = 0$, resp. $J_v = 0$) je všade nulové aj príslušné pole. Ak je aspoň v časti priestoru $q_v \neq 0$ resp $J_v \neq 0$, bude nenulové pole $\vec{D},\ \vec{E},$ resp. $\vec{B}, \vec{H}$ aj to aj v tých bodoch, kde je $q_v = 0$ resp. kde je $J_v = 0$ v týchto bodoch je nulová (len) jeho rotácia. Ďalej sa budeme zaoberať prípadmi v čase premenlivých polí. Uvidíme, že bude mať zmysel hovoriť už len o jedinom, elektromagnetickom poli, pretože elektrické a magnetické veličiny sú navzájom príčinne viazané. Najprv však rozoberme nasledujúci poučný príklad, jednoduchého, v čase sa meniaceho poľa. Predstavme si obláčik voľného elektrického náboja Q_v^T, uzavretého pôvodne do objemu gule s polomerom $r_g \equiv r_g(0)$, ako sa pod účinkom vzájomných odpudivých síl, pozri obr.VII.1, rozpína rovnomerne na všetky strany. V danom okamihu t je náboj rozložený v guli s polomerom $r_g(t)$, s nám neznámou ale podľa stredu gule súmernou objemovou hustotou $q_v(r,t)$. Povrchom ľubovolnej (myslenej) gule s polomerom $r < r_g$, ktorá je koncentrická s pôvodnou guľou, prenáša sa náboj. Preto, v objeme gule (Ω) s polomerom r_g, tečie v okamihu t radiálnym smerom elektrický prúd

$$I_{v\Sigma} = -\frac{\mathrm{d}Q_{v\Omega}}{\mathrm{d}t} > 0 \qquad (*)$$

Pritom $\mathrm{d}Q_{v\Omega}$ je množstvo náboja preneseného v danom okamihu von z objemu gule (Ω) s polomerom r (cez plochu Σ = $4\pi r^2$) a príslušná prúdová hustota na povrchu (Σ) tejto gule, s využitím (*), je

$$J_v(r) = \frac{I_{v\Sigma}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(-\frac{\mathrm{d}Q_{v\Omega}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{Q_{v\Omega}}{4\pi r^2}\right) > 0 \qquad (**)$$

Ak je $Q_{v\Omega} > 0$, a ak pohyb kladného náboja považujeme za smer prúdu, je $\dfrac{\mathrm{d}Q_{v\Omega}}{\mathrm{d}t} < 0$, pretože náboj objem gule opúšťa. Vo výraze (*) preto musí byť záporné znamienko, aby bolo $I_{v\Sigma} > 0$. Poznamenajme, že mimo objemu gule s polomerom $r_g(t)$ nie je v okamihu t žiadny elektrický náboj, preto v tejto časti priestoru prúd netečie. Skúsenosti nám napovedajú, že tam, kde tečie elektrický prúd, existuje aj magnetické pole - pozri Biot-Savartov zákon, alebo hoci vzťah pre rotáciu $\vec{H}$ VII(1.2). Aké je teda magnetické pole v našom príklade? Až po prekvapujúcom zistení, že musi byt všade nulove(!) dostávame sa o krok vpred na ceste k pochopeniu zákonov elektromagnetického poľa. Povedali sme už na inom mieste, že symetria často pôsobí ako zákon v prírode (v našom ponímaní "veľmi silný"). Napríklad v diskutovanej úlohe, z dôvodov symetrie nemôže žiadna z veličín poľa závisieť od uhlov ϑ resp. ψ (na opis tu samozrejme vyberieme sférickú súradnicovú sústavu so stredom v strede myslenej gule).



$r < r_g(t)$ $\qquad$ $r > r_g(t)$

$Q_v(r,t) < Q_v^T$, $I_v(r,t) > 0$ $\qquad$ $Q_v(r,t) \equiv Q_v^T$, $I_v(r,t) = 0$

Obr.VII.1. Na objasnenie posuvného prúdu

Z tých istých príčin, bez porušenia symetrie, okolo radiálnych prúdnic nemôžu sa nijako uzavrieť siločiary magnetického poľa. Žiadny smer v priestore nie je preferovaný, a preto sa tu nemôže vytvoriť pole ktoré by túto symetriu porušovalo. Aj v podobnom prípade, keby tiekol celým priestorom prúd s konštantnou prúdovou hustotou povedzme v smere osi $[x]$, magnetické pole v celom priestore by bolo nulové. Ak je magnetické pole nulové, je nulová aj jeho rotácia (upozornime ovšem, že opačná implikácia neplatí). Podľa výrazu $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v$, VII(1.2) by mala byť nulová aj prúdová hustota. Dostávame sa tak do sporu s výrazom (**), podľa ktorého je hustota prúdu v objeme gule s polomerom $r_g(t)$ nenulová. Na základe Gaussovho zákona, (integrálny tvar výrazu $\mathrm{div}\vec{D} = q_v$, VII(1.1) vieme, že pri $r > r_g(t)$ je $D(r) = \dfrac{Q_v^T}{4\pi r^2}$, kde Q_v^T je celkové (pôvodné) množstvo náboja v čase nemenné. Pripomíname, že pri $r > r_g(t)$ je I_v aj J_v nulové, takže v tejto časti priestoru niet sporu. Pri $r < r_g(t)$, nakoľko náboj $Q_{v\Omega'}(t) = \int_0^r q_v(r',t)\,\mathrm{d}v'$ sa v tejto časti priestoru s časom mení (ubúda), je ale

$$D(r,t) = \frac{Q_{v\Omega}(t)}{4\pi r^2} \qquad (***)$$

funkciou času, samozrejme: $Q_{v\Omega}(t) < Q_v^T$. V objeme gule s polomerom $r_g(t)$, na povrchu každej myslenej gule s polomerom $r < r_g(t)$ je, ako to vyplýva z porovnania (**) a (***) : $J_v = -\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} > 0$. V časovo-premenlivom poli namiesto prvého z výrazov VII(1.2), rotácia intenzity magnetického poľa musí spĺňať rovnosť:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{VII.(1.3)}$$

Podľa nej je tu v každom bode priestoru $\mathrm{rot}\vec{H}$ nulová. K tomu sa pridá aj nulová divergencia, lebo pri konštantnej hodnote μ , je: $\mathrm{div}\vec{B} = \mu\,\mathrm{div}\vec{H} = 0$ a je záver jediný - nulové pole $\vec{H}$. Účinok elektrického prúdu s hustotou $\vec{J}_v > 0$ je kompenzovaný fiktívnym prúdom posuvnym (Maxwellovým) s hustotou $\dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} < 0$. Podľa VII(1.3) majú teda oba členy, $\vec{J}_v > 0$ a $\dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} < 0$ rovnaký účinok, oba sú zdrojmi magnetického poľa. Zmysel výrazu $\dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$ ešte bližšie ozrejmíme. Overme, že v poriadku je i rovnica konzistentná s Faradayovým indukčným zákonom, (touto sa v nestacionárnom poli nahrádza prvý vzťah: $\mathrm{rot}\vec{E}=0$, podľa VII(1.1), ktorý platí len v statickom prípade, výrazom

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{VII.(1.4)}$$

Keďže je $\kappa\vec{E}=\vec{J}_v$ a prúdová hustota má zložku len do radiálneho smeru, pričom z dôvodov symetrie musí byť: $\partial/\partial\vartheta=0,\ \partial/\partial\psi=0$, rotácia $\vec{E}$ je nulová. To je v súlade s nulovou hodnotou $\vec{B}$ (aj $\vec{H}$).

Vráťme sa ešte raz k otázke súvisu voľného náboja a vodivostného prúdu vo všeobecnosti. Zo zákona zachovania elektrického náboja vyplýva, že jeho časová zmena - úbytok v nejakej oblasti Ω - musí byť rovná prúdu ktorý z daného objemu vyteká cez hraničnú plochu Σ, teda cez príslušný povrch, teda

$$I_v=-\frac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ak tento prúd vyjadríme pomocou jeho plošnej hustoty, $\vec{J}_v$ na hraničnej ploche, a náboj v oblasti Ω pomocou jeho objemovej hustoty q_v, dostávame vyššie uvedenú rovnosť v tvare

$$\oiint_{\Sigma}\vec{J}_v\mathrm{d}\vec{s}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{J}_v\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega}q_v\mathrm{d}v$$

využili sme pritom Gaussovu vetu, pozri Dodatok (2.11) na úpravu integrálu s prúdovou hustotou $\vec{J}_v$. Po prepísaní do diferenciálneho tvaru, dostaneme výsledok známy ako rovnica kontinuity

$$\mathrm{div}\vec{J}_v+\frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \text{VII.(1.5)}$$

V stacionárnom poli je $\mathrm{d}q_v/\mathrm{d}t=0$ a preto aj $\mathrm{div}\vec{J}_v(\vec{r},t)=0$.

Výraz VII.(1.5) môžeme dostať i priamo, vykonaním divergencie na oboch stranách výrazu VII.(1.3), s využitím $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)\equiv 0$. Identita: $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{F}\right)\equiv 0$ je splnená pre ľubovoľnú vektorovú funkciu $\vec{F}(r)$.

$$\mathrm{div}\left(\vec{J}_v+\frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}\right)=0 \qquad \text{VII.(1.6)}$$

Stačí len zámeniť poradie operácií derivácia podľa času a divergencia pri vektore $\vec{D}\equiv\vec{D}(\vec{r},t)$ a dosadiť $\mathrm{div}\vec{D}=q_v$.

<u>Maxwellove rovnice a vlnova rovnica vo vakuu</u>

Vzťah $\mathrm{div}\vec{D}=q_v$, rovnica VII(1.3) a rovnica kontinuity VII(1. 5) sú navzájom závislé. Dá sa očakávať, že časová zmena (derivácia) vektora $\vec{D}$, ktorá iste súvisí s posunom viazaných (polarizačných) nábojov v látke ($\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$), prejaví sa navonok ako prúdová hustota, v súlade s výrazom VII(1.6). Nevieme, či bol Maxwell prvý, kto takouto, alebo podobnou úvahou dospel k poznatku, že časová zmena vekora $\vec{D}$ je ekvivalentná, čo do účinku, s elektrickým prúdom. Bol to však on, kto uviedol vzťah VII(1.3) ako jeden zo základných zákonov elektromagnetizmu v časovo-premenlivom, (tiež dynamickom, alebo nestacionárnom) poli, popri vzťahu VII(1.4) (ten je však len prepisom známeho indukčného zákona Faradayovho), a vzťahoch pre divergencie veličín, ktoré sa aj tu zachovávaju v tvare VII(1.1) a VII(1.2). Aby sme hlbšie pochopili zmysel VII(1.3), dosaďme do tohto vzťahu: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ a $\vec{J}=\kappa\vec{E}$, bude

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\kappa\vec{E}+\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{VII.(1.7)}$$

V nevodiči a v prostredí s nulovou polarizáciou ($\kappa=0, P=0$), napríklad vo vákuu, zostáva zo VII(1.7) len

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{VII.(1.8)}$$

Príčinou vzniku magnetického poľa v takomto prípade (na pravej strane rovníc typu VII(1.1) resp. VII(1.2)) sú vždy zdrojové veličiny) je len časová zmena elektrického poľa ! Tzv. posuvný (Maxwellov) prúd vo vákuu nepredstavuje dokonca žiadny transport náboja ani vodivostného ani fiktívneho (spôsobeného polarizáciou). Možno by bolo namieste pozmenit (rozšíriť) definíciu elektrického prúdu! Ak ďalej podľa VII(1.3), dosadíme $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$ a pole bude v prostredí s nulovou magnetizáciou, príčinou vzniku elektrického poľa, môže byť len časová zmena magnetického poľa

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{VII.(1.9)}$$

Táto "podivná situácia" bude ešte výraznejšia ak z úvahy vylúčime aj voľné elektrické náboje, ktoré by mohli byť napr. emitované nejakým telesom. Potom niet "zdrojov", a existencia elektrického poľa je daná časovou zmenou magnetického poľa, zatiaľčo existencia magnetického poľa je daná časovou zmenou elektrického poľa. To sme už počuli: z vajca je sliepka - zo sliepky je vajce ... Vari takto, a podobne, mohli namietať Maxwellovi súčasníci. Treba vedieť, že v r.1873, keď James Clerk Maxwell publikoval svoj slávny spis: The Treatise on Electricity and Magnetism, chýbalo ešte 14 rokov do času, kedy Heinrich Hertz podal experimentálny dôkaz o existencii elektromagnetických vĺn, ktorých rovnicu vo vákuu dostaneme práve zo VII(1.8) a VII(1.9). Ak vypočítame rotáciu oboch strán rovnice VII(1.8), bude na jej pravej strane vystupovať časová derivácia výrazu ($\mathrm{rot}\vec{E}$), kam môžeme výraz VII(1.9) priamo dosadiť

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{rot}\vec{E}) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\mu_0 \frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{H}}{\mathrm{d}t^2} \quad .$$

Zameniť poradie derivácie podľa času a aplikovania diferenciálnych operátorov (grad, rot, div alebo ∇^2) je vždy dovolené, pretože čas (t) je práve tak nezávislou premennou, ako priestorové súradnice ($\vec{r}$). Uvážili sme pritom, tiež $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$. Keby sme ten istý postup uplatnili pri vzťahu VII(1.9), dostali by sme taký istý výsledok ako vyššie, ale tentokrát pre vektor $\vec{E}$.
Ak použijeme výraz (2.03) z Dodatku na vyjadrenie dvojnásobnej rotácie: $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{F}\right) = -\nabla^2\vec{F} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{F}\right)$, s uvážením rovnosti $\mathrm{div}\vec{H} = 0$, ktorá vyplýva priamo zo všeobecne platnej rovnice $\mathrm{div}\vec{B} \equiv 0$, keďže $\vec{B} = \mu\vec{H}$ a μ -je konštanta a tiež rovnosti $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, lebo $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, ε -je konštanta a podľa predpokladu v priestore niet nábojov, teda: $\mathrm{div}\vec{D} = q_v = 0$, dostávame pre vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ vo vákuu dve, tvarove rovnaké, tzv. vlnové rovnice

$$\nabla^2\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{H}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \nabla^2\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{VII.(1.10)}$$

Z teórie diferenciálnych rovníc je známe, (pozri Dodatok (3 .05)) že riešením VII(1.10) sú ľubovolné funkcie argumentu $\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)$, a v karteziánskej súradnicovej sústave, je: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ponechávame na čitateľa, aby sa sám presvedčil, že výsledok aplikovania operátora: $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, na akúkoľvek funkciu $f\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)$ sa od výsledku po aplikovaní operátora $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$ na tú istú funkciu, líši len o súčiniteľa: $-1/c^2$. Riešenie typu $f\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)$ predstavuje vlnenie, ktoré sa šíri rýchlosťou: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Hodnotu, ktorú má funkcia $f\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)$ v okamihu $t = t_1$ v mieste $r = r_1$, nadobudne v mieste r_2 v okamihu $t_2 = t_1 \mp \dfrac{r_2 - r_1}{c}$, ako to priamo vyplýva z rovnosti jej argumentov: $t_1 \pm \dfrac{r_1}{c} = t_2 \pm \dfrac{r_2}{c}$.

V časti priestoru, kde niet zdrojov ($q_v = 0,\ J_v = 0$ *) môže existovať elektromagnetické pole len ako vlnenie. Ak bolo pole vybudené, ako dôsledok (dočasnej) existencie zdrojov* $q_v \neq 0$ *alebo/aj* $J_v \neq 0$ *v* *<u>nejakej časti priestoru</u>, bude po istom čase samostatne existovať v* *<u>každej časti priestoru</u>* *a to aj po zániku pôvodných zdrojov (* q_v, J_v *).*

<u>Maxwellove rovnice v prostredi vyplnenom látkou</u>

Uvedieme ešte raz Maxwellove rovnice v diferenciálnom aj v integrálnom tvare, spolu s niektorými ďalšími, dôležitými vzťahmi, tak ako ich neskôr použijeme pri výklade teórie dynamického poľa.

diferenciálny tvar : *integrálny tvar :*

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_\Gamma \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = I_v + \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \qquad \text{VII.(1.11)}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = q_v \qquad \oiint_\Sigma \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_v$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \oiint_\Sigma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{VII.(1.12)}$$

pritom vektory $\vec{J}, \vec{D}, \vec{B}$, ktoré reprezentujú hustotu tokov: I_v - elektrického (možno nie najšťastnejšie nazvaného prúd), Φ_E - dielektrického a Φ_M - magnetického, môžu byť vyjadrené takto:

$$\vec{J}_v = \kappa\vec{E} \qquad I_v = \iint_\Sigma \vec{J}_v \cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \text{pričom} \quad \oiint_\Sigma \vec{J}_v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{VII.(1.13)}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \Phi_E = \iint_\Sigma \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \text{pričom} \quad \oiint_\Sigma \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_v$$

$$\vec{B} = \mu\vec{E} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} \qquad \Phi_M = \iint_\Sigma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \text{pričom} \quad \oiint_\Sigma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{VII.(1.14)}$$

Pri prepise rovníc z diferenciálneho tvaru do integrálneho, alebo opačne, využívame Stokesovu a Gaussovu vetu, ktoré sú uvedené v Dodatku ako (02.11) a (02.12). Tu si treba uvedomiť, že rovnice v diferenciálnom tvare sa týkajú vždy toho istého bodu v priestore, takže napríklad $\mathrm{rot}\vec{H}$ podľa prvej z rovníc VII(1.11) vľavo, sa rovná súčtu prúdovej hustoty $\vec{J}$ a časovej zmeny $\partial\vec{D}/\partial t$ v jednom a tom istom mieste. Naproti tomu, integrálne rovnice hovoria o väzbách veličín v rozdielnych častiach priestoru ! Podľa prvej z rovníc VII(1.11) vpravo, je cirkulácia intenzity poľa $\vec{H}$ počítaná po krivke Γ rovná súčtu vodivostného prúdu I_v (teda hustoty „elektrického toku“) a časovej zmeny dielektrického toku $\partial\vec{D}_E/\partial t$ prechádzajúcimi tou plochou Σ, ktorá je krivkou Γ ohraničená. Analogicky, v prvej rovnici rovnici VII(1.12) vpravo, je integrálnym zákonom viazaný výtok vektora $\vec{D}$ cez povrch Σ, s voľným nábojom, ktorý je uzavretý v objeme Ω, ohraničenom plochou (povrchom) Σ, zatiaľčo v prvej rovnici VII(1.12) vľavo vystupujú obe veličiny $\mathrm{div}\vec{D}$ aj q_v v tom istom bode priestoru.

Zavedenie konštánt ε, μ je podmienené tým, že vektor polarizácie je úmerný vektoru intenzity elektrického poľa: $\vec{P} = \varepsilon_0\kappa_E\vec{E}$, potom $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\kappa_E) = \varepsilon_0\varepsilon_r$, a podobne, že vektor magnetizácie je úmerný vektoru intenzity magnetického poľa $\vec{M} = \kappa_M\vec{H}$, a potom je $\mu = \mu_0(1+\kappa_M) = \mu_0\mu_r$. Vplyv prostredia vyplneného látkou je v takýchto prípadoch zahrnutý v konštantách známych ako dielektrická κ_E a magnetická κ_M susceptibilia. Ak tu vzťah priamej úmernosti neplatí, nemusí mať používanie ε a μ praktický význam, (v takom prípade môžeme uvažovať, že ε a μ neexistujú) a pri vyjadrovaní vektorov $\vec{D}$, $\vec{B}$ potom možno (alebo treba) používať vektory $\vec{P}, \vec{M}$.
Riešenie takýchto úloh sa ale zvyčajne komplikuje tým, že vektory polarizácie a magnetizácie závisia zložitejším spôsobom, (t.j. nie lineárne) od intenzity poľa $\vec{E}$ resp. $\vec{H}$ a spätne, intenzita oboch polí a ich časová zmena ovplyvňujú vektory $\vec{P}$ a $\vec{M}$.

Dosaďme do Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare VII(1.11) a VII(1.12) vzťahy VII(1.13) a VII(1.14). Naviac, rozšírime výraz pre hustotu prúdu tak, že napíšeme: $\vec{J} = \vec{J}_0 + \kappa\vec{E}$, kde je pridaná hustota prúdu vnúteného nezávislým vonkajším "prudovym " zdrojom $\vec{J}_0$. Prúdová hustota $\vec{J}_0$ nezávisí od hodnoty $\vec{E}$ v danom mieste, podobne ako v elektrickom obvode nezávisí prúd prudoveho zdroja od napätia, hodnota ktorého je na ňom daná zapojením okolitých prvkov.

Bude

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)=\vec{J}_0+\kappa\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right),\quad \mathrm{div}\vec{B}=0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}\right),\qquad \mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=q_v$$

a po krátkej úprave, keď označíme: $\vec{J}=\vec{J}_0+\kappa\vec{E}+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\mathrm{rot}\vec{M}$, a $q=q_v-\mathrm{div}\vec{P}$ dostaneme

$$\mathrm{rot}\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{J},\quad \mathrm{div}\vec{B}=0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\qquad \mathrm{div}\vec{E}=\frac{q_v}{\varepsilon_0} \qquad \text{VII.(1.15)}$$

Pritom môžeme priliehavo nazvať: $\vec{J}_v=\kappa\vec{E}$ vektorom hustoty vodivostného prúdu, $\vec{J}_P=\partial\vec{P}/\partial t$ vektorom hustoty polarizačného prúdu a $\vec{J}_M=rot\vec{M}$ vektorom hustoty magnetizačného prúdu. Posledné dve z menovaných hustôt majú pochopiteľne len fiktívny charakter, pretože fyzikálne nezodpovedajú prúdom v pravom zmysle slova, hoci ich jednotkou je A/m^2 . Súčasne je $q=q_v-\mathrm{div}\vec{P}$, kde objemová hustota polarizačného náboja $q_P=-\mathrm{div}\vec{P}$. Podľa toho sú v VII(1.15) zdrojové veličiny $\vec{J}=\vec{J}_0+\vec{J}_v+\vec{J}_P+\vec{J}_M$ a $q=q_v+q_P$. Vynechajme tie, ktoré priamo nesúvisia s látkou vypĺňajúcou dané prostredie (teda nech $\vec{J}_0=0$, $q_v=0$), a nech aj $\vec{J}_v=0$ ako dôsledok toho, že $\kappa=0$. Označme $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, potom:

v prostredí vyplnenom látkou : *vo vákuu :*

$$\mathrm{rot}\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+rot\vec{M}\right),\qquad \mathrm{rot}\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\qquad \mathrm{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \qquad \text{VII.(1.15)}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\vec{P},\qquad \mathrm{div}\vec{E}=0$$

$$\mathrm{div}\vec{B}=0,\qquad \mathrm{div}\vec{B}=0$$

Pritom $\vec{P}$ a $\vec{M}$ tu opäť nemusia byť lineárnymi funkciami $\vec{E}$ resp. $\vec{H}$, teda ε a μ nemusia byť konštantami, ba dokonca v zmysle vyššie uvedenej poznámky nemusia ani existovať (vyjadríme vzájomné vzťahy i bez nich). Z rovníc VII(1.17) podobne, ako z rovníc VII(1.8) a VII(1.9) dostaneme vlnové rovnice typu VII(1.9) pre *E* a *B*. Ich modifikácia, v prostredí vyplnenom látkou, sa získa analogicky z VII(1.16). Z pohľadu matematiky ide o systémy tých istých rovníc bez pravej strany (homogénny systém) vo vákuu a s pravou stranou (nehomogénny systém) v prostredí vyplnenom látkou. Pohľad na rovnice VII(1.15) a VII(1.16) v porovnaní so VII(1.17) nás privádza k myšlienke o možnosti nahradiť pri riešení polí prítomnosť látky ekvivalentnými (t.j. fiktivnymi) zdrojmi: polarizačným nábojom ($q_P=-div\vec{P}$), polarizačným prúdom $\vec{J}_P=-\partial\vec{P}/\partial t$ a magnetizačným prúdom $\vec{J}_M=\mathrm{rot}\vec{M}$. Rovnice VII(1.15) a VII(1.16) nám uľahčujú riešenie vtedy, ak sú známe závislosti $\vec{P}(x,y,z,t),\vec{M}(x,y,z,t),$ inak možno vidieť ich prínos len v objasnení súvisu medzi poľom vo vákuu - porovnaj s VII(1.17) - a poľom v prostredí vyplnenom látkou. Vychádzajúc zo zápisu týchto rovníc by sme mohli zaujať stanovisko, že za základné vektory poľa treba považovať vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Pripomíname, že práve pomocou nich sa vyjadruje silový účinok oboch polí na náboj v pokoji a na náboj v pohybe (na elektrický prúd). K poslednej otázke je ale možný aj iný prístup, známy ako Lorentzova teória mikroskopického poľa, pozri napríklad [4].

<u>*Lorentzova teória mikroskopického poľa*</u>

Zakladá sa na predstave, že látka je tvorená uzlami hmoty (atómy) nachádzajúcimi sa vo vákuu, a preto je možný popis pomocou intenzity elektrického $e(x,y,z,t)$ a intenzity magnetického poľa $h(x,y,z,t)$ ako mikroskopickych veličín v medziatomárnom priestore. Za zdroje sa pritom považuje celkový, (totálny) elektrický náboj s hustotou $q=q_v+q_P$ a celkový (totálny) prúd s hustotami $\vec{J} = \vec{J}_v + \vec{J}_P + \vec{J}_M$. Okrem hustoty volného náboja q_v a hustoty vodivostného prúdu $\vec{J}_v$ tu príspievajú aj fiktívne hustoty q_P , $\vec{J}_P$ od polarizácie a hustota $\vec{J}_M$ od magnetizácie jednotlivých atómov. To je v súlade so vzťahmi uvedenými za výrazmi VII(1.15), ktoré tiež svojim tvarom pripomínajú nasledujúce, tzv.Lorentzove rovnice:

$$\mathrm{rot}\vec{h} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{J}, \qquad \mathrm{rot}\vec{e} + \mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0$$
$$\mathrm{div}\vec{h} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{e} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{VII.(1.18)}$$

Vo vákuu, aj v prostredí vyplnenom látkou majú tu uvedené rovnice rovnaký tvar. Podľa okolností sa mení len q resp. J . Pri splnení istých predpokladov, časovo a priestorovo ustrednené hodnoty veličín $\langle e \rangle$ a $\langle h \rangle$ intenzity mikroskopického poľa, podľa týchto rovníc, budú kompatibilné s Maxwellovými rovnicami. Pritom bude: $\vec{B} = \mu_0 \langle \vec{h} \rangle$ a $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$, a keďže $\langle q_P \rangle = -\mathrm{div}\vec{P}$ a ďalej $\langle \vec{J}_P + \vec{J}_M \rangle = \partial \vec{P} / \partial t + \mathrm{rot}\vec{M}$, možno zaviesť vektory $\vec{D}$ a $\vec{H}$ v súlade s rovnicami VII(1.15) tak, aby $\mathrm{div}\vec{D} = \langle q_V \rangle$ a tiež aby $\mathrm{rot}\vec{H} - \partial \vec{D} / \partial t = \langle \vec{J}_V \rangle$, podobne, ako sa to uvádza v VII(1.11) a VII(1.12).

Prv ako sa začneme Maxwellovými rovnicami zaoberať podrobnejšie, zdôrazňujeme ešte raz, že nie sú nezávislé, ak berieme do úvahy platnosť rovnice kontinuity VII(1.5). Ďalej stojí za zmienku, že vlnové rovnice typu VII(1.10) dostávame z prvých dvoch Maxwellových rovníc VII(1.11) v diferenciálnom tvare, vypočítaním ich rotácie a nasledovným vzájomným dosadzovaním, - podobne, ako sme to urobili s rovnicami VII(1.8) a VII(1.9) - a že druhé dve Maxwellove rovnice VII(1.12) používame popri tom, akoby mali slúžiť len na zjednodušenie výsledných vzťahov. Aj keď sú všetky štyri rovnice rovnako dôležité, istá nadradenosť prvých dvoch, (ktoré obsahujú derivácie podľa času) vyplýva zo skutočnosti, že vždy: $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F}) = 0$.

Vypočítaním divergencie prvej z rovníc VII(1.11) dostávame vzťah VII(1.6) do ktorého dosadíme za $\mathrm{div}\vec{J} = 0$ z rovnice kontinuity VII(1.5)

$$-\frac{\partial q_v}{\partial t} + \mathrm{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(-q_v + \mathrm{div}\vec{D}\right) \qquad \text{VII.(1.19)}$$

podobne, divergencia druhej z rovníc VII(1.11) dáva:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{E}) \equiv 0 = \mathrm{div}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{B}\right) \qquad \text{VII.(1.20)}$$

Ak je časová derivácia výrazov $\left(-q_v + \mathrm{div}\vec{D}\right)$ a $\left(\mathrm{div}\vec{B}\right)$ nulová, znamená to, že výrazy sú v čase konštantné. Majú stále takú istú hodnotu akú mali pri $t = 0$. Tretia a štvrtá Maxwellova rovnica: $\mathrm{div}\vec{D} = q_v$ a $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, sú preto iba rovnicami vyjadrujúcimi začiatočné podmienky. Je pozoruhodné, že ak bola raz $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, napr. aj v okamihu tzv. velkého tresku (Big-Bang, vzink vesmíru), musí byť podľa VII(1.20) navždy taká ! Nakoniec ešte jedna poznámka.Vo vodivom prostredí pri konštantných κ , ε a μ z rovnice kontinuity VII(1.5) , po dosadení za $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ a so zreteľom na rovnicu $\mathrm{div}\vec{D} = \varepsilon \mathrm{div}\vec{E}$ máme

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = \frac{\kappa}{\varepsilon} q_v \qquad \text{VII.(1.21)}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice: $q_v(t) = q_v(0)\exp\left(-t/\tau\right)$ hovorí, že pôvodné objemové rozloženie voľného náboja $q_v(0)$, nech by bolo akékoľvek, vo vodivom prostredí veľmi rýchlo vymizne. Tzv. relaxačná doba (časová konštanta) s hodnotou: $\tau = \varepsilon / \kappa$ je vo vodičoch veľmi malá, napríklad pri medi, $\varepsilon_{\mathrm{Cu}} \approx \varepsilon_0$, je:

$$\varepsilon_{Cu} / \kappa_{Cu} = 8.859\times10^{-12} / 6\times10^{7} = 1.47\times10^{-19}\,\mathrm{s},$$

za veľmi krátky čas po nabití vodivého telesa, usadí sa volný elektrický náboj (ako už vieme) na jeho povrchu.

VII.2. ENERGIA POLA

Poyntingov vektor a rovnica kontinuity.

Objemovú hustotu energie elektrického resp. magnetického poľa v stacionárnom stave možno vyjadriť, ako sme už poznali, v tvare

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \qquad \text{VII.(2.1)}$$

V poli meniacom sa v čase, keď využijeme vzťahy $\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H}$, kde $\varepsilon,\ \mu$ sú konstanty, budú zmeny jednotlivých hustôt energie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_e}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{D} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial w_m}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\vec{B} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \qquad \text{VII.(2.2)}$$

Za $\partial\vec{D}/\partial t$ a $\partial\vec{B}/\partial t$ dosadíme z prvých dvoch Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare VII(1.11):

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \vec{E}\cdot\left(\mathrm{rot}\vec{H} - \vec{J}\right), \qquad \frac{\partial w_m}{\partial t} = \vec{H}\cdot\left(-\mathrm{rot}\vec{E}\right) \qquad \text{VII.(2.3)}$$

Ak uvážime známu vektorovú identitu D(2.02), v našom prípade bude: $div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{H}$. Potom derivácia súčtu hustôt energie $\partial w/\partial t = \partial\left(w_e + w_m\right)/\partial t$, so zreteľom na VII(2.3) dáva:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) + \vec{J}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \text{VII.(2.4)}$$

Vektorová funkcia $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$, alebo podrobnejšie:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) \qquad \text{VII.(2.5)}$$

s rozmerom V.A /m^2 = W/m^2, ktorá predstavuje istú plošnú hustotu výkonu, nazýva sa Poyntingov vektor. Keďže môže byť: $\vec{J} = \vec{J}_0 + k\vec{E}$, kde $\vec{J}_0$ je plošná hustota nezávislého vnúteného prúdu (od vonkajšieho prúdového zdroja), bude aj:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \kappa E^2 + \mathrm{div}\vec{S} = -\vec{J}_0\cdot\vec{E} \qquad \text{VII.(2.6)}$$

Podľa VII(2.6) musí byť v ľubovoľnom bode priestoru a v ľubovoľnom okamihu objemová hustota výkonu " vonkajšieho " prúdového zdroja ($-\vec{J}_0\cdot\vec{E}$) rovná súčtu objemových hustôt, výkonu predstavujúceho časovú zmenu hustoty energie poľa ($\partial w/\partial t$), výkonu potrebného na pokrytie Jouleových strát (κE^2) v dôsledku vodivosti prostredia a na čosi, čo je predstavované novým členom: $\mathrm{div}\vec{S}$. Ak bude prostredie nevodivé (bezstratové), a v uvažovanom mieste nebude prúd vonkajšieho zdroja, t.j. $\kappa = 0$ aj $J_0 = 0$, (poznamenajme, že "prúd" vonkajšieho zdroja môže byť tvorený napríklad aj letiacimi nosičmi náboja vo vákuu, takže by mohlo byť: $J_0 \neq 0$ aj pri $\kappa = 0$) namiesto VII(2.6) bude:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{S} = 0 \qquad \text{VII.(2.7)}$$

Toto je tiež rovnica kontinuity. Tak, ako vzťah VII(1.5) vyjadruje zachovanie náboja resp. rovnicu kontinuity toku prúdu (vektora prúdovej hustoty J), tu vyjadruje VII(2.7) zákon zachovania energie resp. rovnicu kontinuity toku energie (alebo presnejšie, vektora výkonovej hustoty $\vec{S}$).

Vyžarovanie energie

Integráciou výrazu VII(2.7) v nejakej oblasti Ω dostaneme

$$-\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\vec{S}\mathrm{d}v=\oiint\limits_{\Sigma}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{VII.(2.8)}$$

keď sme opäť využili Gaussovu vetu D(2.10), pričom ako vždy, Σ - je povrch ohraničujúci oblasť (objem) Ω. Časová zmena hustoty energie elektromagnetického poľa v objeme Ω je nevyhnutne sprevádzaná prúdením energie do okolitého priestoru cez (napríklad myslenú) plochu Σ, ktorá je vždy typu povrch telesa. Ľahko možno formulovať tento zakon zachovania energie aj v prípade, ak $\kappa \neq 0$, a ak pôsobí aj vonkajší prúdový zdroj, integráciou rovnosti VII(2.6). Toto ponechávame na čitateľa. Podľa uvedeného člen $\mathrm{div}\vec{S}$ predstavuje objemovú hustotu vyžarovanej elektromagnetickej energie a podľa VII(2.7) resp. VII(2.8) k vyžarovaniu dochádza, keď je $\partial w/\partial t \neq 0$, teda v časovo-premenlivom poli vždy !

Výkon a Jouleove straty

Je veľmi zaujímavé, ako sa tu ukazuje, že vzťahy pre energiu elektrickeho a magnetickeho poľa VII(2.1), odvodené v stacionárnom stave majú svoj význam aj v nestacionárnom elektromagnetickom poli a že objemová hustota energie elektromagnetického poľa je daná ich súčtom: $w = w_e + w_m$. Podľa VII(2.5) je Poyntingov vektor funkciou polohy a času, takže integrál plošnej hustoty vyžiareného výkonu, podľa VII(2.5), počítaný cez nejakú plochu Σ,

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{S}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s}=p(t) \qquad \text{VII.(2.9)}$$

bude mať význam okamihoveho vykonu, preneseného (vyžarovaním) cez danoú plochou Σ. Pri ustálenom, (t.j. periódickom) priebehu veličín poľa bude dôležitá stredná hodnota výrazu VII(2.9), vypočítaná za jednu periódu, ktorá predstavuje (analogicky ako v elektrických obvodoch), tzv. činny alebo wattovy výkon:

$$P_w=\langle p(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T}p(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T}\iint\limits_{\Sigma}\vec{S}(\vec{r},\tau)\cdot\mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\tau \qquad \text{VII.(2.10)}$$

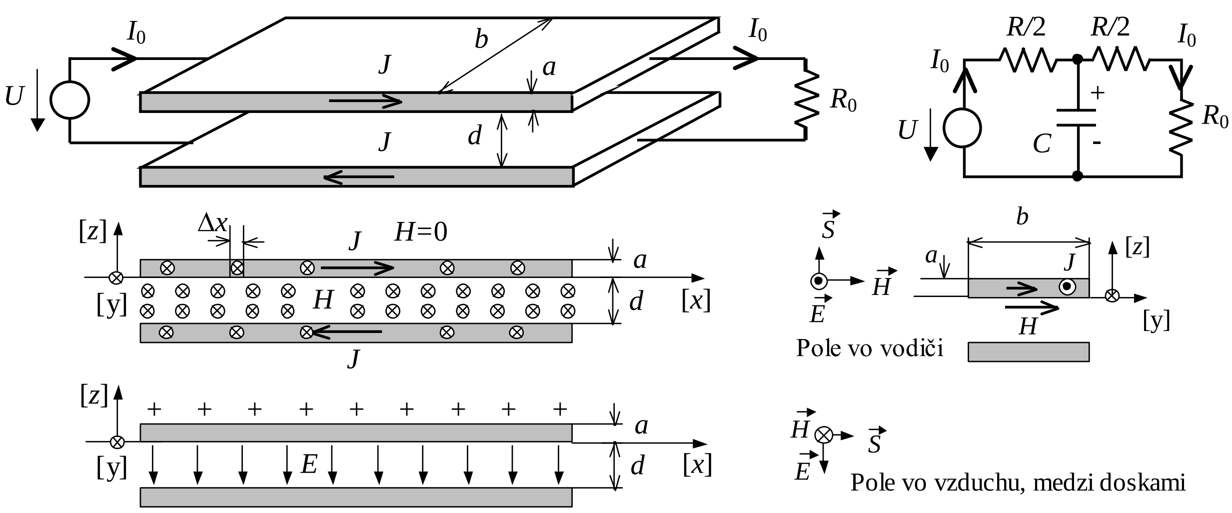
Z uvedenej definície je zrejmé, niekedy sa na to zabúda, že pojem činný resp. wattový výkon má zmysel len pri ustálených t.j. periódických priebehoch alebo pri priebehu konštantnom v čase.
V stacionárnom poli je činný výkon $P_w = p$, kde $p-$ je dané výrazom VII(2.9). Podľa VII(2.6) vzhľadom na to, že $\partial w/\partial t = 0$, bez vonkajšieho zdroja prúdu ($J_0 = 0$), a vo vodivom prostredí ($\kappa \neq 0$) platí:

$$-\oiint\limits_{\Sigma}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\kappa\iiint\limits_{\Omega}E^2\mathrm{d}v \qquad \text{VII.(2.11)}$$

Výtok vektora $-\vec{S}$ cez povrch Σ je rovný Jouleovym stratám v objeme ohraničenom do seba uzavretou plochou Σ. V tejto súvislosti je však zaujímavá otázka, či môže mať Poyntigov vektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$, aj v prípade stacionárnych alebo statických polí taký istý zmysel, ako v časovo premenlivom poli. Na jednej strane možno súhlasiť s názorom, že v stacionánom stave je elektricke pole a magneticke pole jedno od druhého nezávislé, v zmysle nezávislosti párov rovníc VII(1.1) a VII(1.2), a preto je otazné, či je " pokus o ich zviazanie " zavedením výrazu typu $\vec{E}\times\vec{H}$ namieste. Na druhej strane, magnetické pole je budené prúdom a tam, kde tečie prúd, existuje (pri $\kappa \neq 0$) elektrické pole. Tieto dve polia nie sú nezávislé ale naopak, sú príčinne zviazané. Možno uviesť celý rad prípadov, kedy pomocou vektora $\vec{S}$ v stacionárnom poli, prichádzame k správnym výsledkom. Ako príklad sme vybrali konfiguráciu podľa obr.VII.2, kde je znázornený priečny rez homogénným vedením, tvoreným dvoma rozľahlými doskami s hrúbkou a, vzdialenými navzájom o d. Vrchnou doskou nech tečie prúd od zdroja U smerom zľava doprava, v smere osi [x] a dolnou, od záťaže R_0 opačným smerom. Prúd je stacionárny (v čase konštantný), prúdová hustota je rovnomerná. Izolácia medzi doskami je dokonalá, zvodový prúd je vylúčený. Aby sme sa vyhli komplikovanejšiemu výpočtu, budeme predpokladať, že dosky sú nekonečne rozľahlé a sú dokonalými vodičmi: $\kappa \to \infty$. Nech I - je prúd pretekajúci jednou z dosiek prierezom $a \times b$, kde b je ľubovoľná dĺžka v smere osi [y]. V priestore medzi doskami bude homogénne magnetické pole $H_0 = I_0 / b$ orientované rovnobežne s povrchom dosiek a kolmo na smer prúdu (v smere osi [y]). Uvedená konfigurácia vodičov je vpodstate doskový kondenzátor (vodiče sa vždy vyznačujú istou vzájomnou kapacitou) a jej „obvodárska náhrada“ je uvedená v pravej hornej časti na obrázku. Ak je v danom mieste so súradnicou *x* napätie medzi doskami *U*, len vďaka tomu, že pri $\kappa \to \infty$ nie je na vodiči v smere postupu prúdu žiadny úbytok napätia, elektrické pole tu má intenzitu $E_0 = U / d$, orientovanú kolmo k doskám (v smere osi [-z]) a v závislosti od súradnice *x* nemá klesajúcu tendenciu. Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, násobený vektorom plochy $db\vec{u}_x$ reprezentuje podľa VII(2.11) výkon prenesený časťou priestoru medzi oboma doskovými vodičmi. Po dosadení máme: $Sdb = I_0 U$, čo je výraz zhodný s výkonom preneseným daným prierezom časti vedenia so šírkou *b* do záťaže R_0. Pokračujme ďalej a upustime od predstavy dokonalého vodiča, nech je κ konečné. V objeme vodiča je intenzita elektrického poľa orientovaná v smere prúdu a platí $\kappa\vec{E} = \vec{u}_x I_0 / ab$. Intenzitu magnetického poľa v objeme vrchnej dosky vypočítame na základe zákona prietoku superpozíciou, od dvoch častí hornej dosky (vrstvy pod a nad myslenou rovinonu v ktorej pole počítame mjú navzájom opačný účinok) a od celej spodnej dosky. (Intenzita magnetického poľa v okolí nekonečne rozľahlého, doskového vodiča, pretekaného prúdom s líniovou hustotou $K = I_0 / b$, je: $H = K / 2$). Pri začiatku súradnicovej sústavy podľa obrázku dostaneme pre $0 < z < a$: $\vec{H}(z) = \vec{u}_y I_0 (1 - z / a) / b$, a Poyntingov vektor bude

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I_0}{ab\kappa}\vec{u}_x \times I_0\left(1 - \frac{z}{a}\right)\vec{u}_y = \frac{I_0^2}{ab\kappa}\left(1 - \frac{z}{a}\right)\vec{u}_z .$$

Pripomeňme, že pri $a < z$, teda nad hornou doskou je intenzita poľa *H* nulová, pokým pod hornou doskou je konštantná $H_0 = I_0 / b$. Podobne je to samozrejme aj pri dolnej vodivej doske.



Obr.VII.2. K výpočtu výkonu a Jouleových strát

Rozdiel hustôt výkonu $\Delta S = S(0) - S(a) = S(0) - 0$ násobený plochou $b\Delta x$, dáva podľa VII(2.11) Jouleove straty $P_w = I_0^2 \Delta x / ab\kappa$ abσ v časti objemu ($\Delta v = ab\Delta x$) vodiča. Ten istý výsledok dostávame aj zo vzťahu $P_w = I_0^2 \Delta R$, kde ΔR je odpor časti doskového vodiča s objemom Δv. Oba výsledky sú teda v súlade s VII(2.11). Ponechávame na precvičenie, podobný výpočet strát (alebo odporu) pomocou vzťahu VII(2.11) v prípade valcového vodiča pretekaného v osovom smere jednosmerným stacionárnym prúdom. Bude hádam užitočné uviesť už na tomto mieste, že pri striedavom prúde (t.j. v nestacionárnom, dynamickom poli) môžeme vykonať podobný výpočet, hoci rozloženie prúdovej hustoty (ako neskôr poznáme) nebude v takom prípade rovnomerné. Nakoniec sa možno pridŕžať aj takej predstavy, že tak, ako sa frekvencia striedavého prúdu znižuje, rozloženie prúdovej hustoty a celé pole sa postupne približuje jednosmernému, stacionárnemu prípadu. Potom je pochopiteľné, že pri extrémne nízkej frekvencii, kedy sa striedavé pole len málo líši od stacionárneho prípadu, ale Poyntingov vektor má stále ten zmysel ktorý mu prisudzujeme v časovo-premenlivom poli, sú výsledky prakticky také isté ako pri stacionárnom (jednosmernom) poli.

VII.3 VLNOVE ROVNICE

Skalárny a vektorový dynamický potencial

Ak pri formulovaní rovníc stacionárnych polí použite skalárneho potenciálu $\varphi(\vec{r})$ a vektorového potenciálu $\vec{A}(\vec{r})$ umožnilo (prinajmenšom v niektorých prípadoch) zjednodušiť riešenie, spytujeme sa, či podobný postup, neprinesie podobné výhody aj v nestacionárnom poli. Zavedenie vektorového potenciálu bolo umožnené tým, že vždy je splnená rovnosť: $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$, a preto štvrtej Maxwellovej rovnici $\text{div}\vec{B} \equiv 0$ vyhovieme, ak bude: $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r})$. Divergencia vektora $\vec{B}$ je rovnako nulová v stacionárnom poli aj v dynamickom poli (nestacionárnom), preto v oboch prípadoch bude užitočná voľba

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r},t) \qquad \text{VII.(3.2)}$$

Pripomeňme, že vzhľadom na identitu $\text{rot}\left(\text{grad}\,\psi(\vec{r},t)\right) \equiv 0$, nie je vzťahom VII(3.1) pri "danom" $\vec{B}(\vec{r},t)$ jednoznačne určená funkcia $\vec{A}(\vec{r},t)$, lebo ak ju nahradíme výrazom: $\vec{A}(\vec{r},t) + \text{grad}\,\psi(\vec{r},t)$, kde $\psi(\vec{r},t)$ je ľubovoľná skalárna funkcia, rovnosť VII(3.1) sa zachová, porovnaj D(2.01). Preto, že každé vektorové pole je jednoznačne určené, až keď je okrem jeho rotacie daná i jeho divergencia, v stacionárnom poli sme s výhodou volili doplňujúcu podmienku tak, aby bola $\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$. Ako bude výhodné zvoliť divergenciu vektorového potenciálu $\vec{A}(\vec{r},t)$ v dynamickom poli, uvidíme neskôr. Rovnosť $\text{rot grad}\,\psi(\vec{r},t) \equiv 0$ zohrala svoju úlohu aj pri zavedení skalárneho potenciálu. V stacionárnom poli je rot $\text{rot}\vec{E}(\vec{r}) = 0$, preto sme mohli položiť: $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\underline{r})$, (z istých dôvodov sme vybrali: $\varphi(\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$. Podľa druhej Maxwellovej rovnice v nestacionárnom poli je ovšem: $\text{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\partial\vec{B}(\vec{r},t)/\partial t$, a to, že rotácia vektorovej funkcie $\vec{E}(\vec{r},t)$ je nenulová, znemožňuje nadalej používať vzťah $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\vec{r})$. Musíme konštatovať, že v dynamickom poli už tento vzťah neplatí ! Teda $\vec{E}(\vec{r},t) \neq -\text{grad}\,\varphi(\vec{r},t)$. Ak ale dosadíme za $\vec{B}(\vec{r},t)$ zo VII(3.1), zameníme poradie derivácie podľa času a operácie rotácie a prenesieme člen z pravej strany v druhej Maxwellovej rovnici na ľavú stranu, bude

$$\text{rot}\vec{E} + \text{rot}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \text{VII.(3.2)}$$

Výraz v zátvorke iste možno ovšem vyjadriť ako gradient určitej skalárnej funkcie, pretože jeho rotácia je nulová. V dynamickom poli definujeme preto skalárny potenciál výrazom

$$-\text{grad}\,\varphi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \text{VII.(3.3)}$$

z ktorého získame nový vzťah

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \text{VII.(3.4)}$$

pričom pri $\partial/\partial t = 0$, t.j. v stacionárnom poli, dostávame pôvodný výraz, $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\vec{r})$. Na tomto mieste doplníme poznámku uvedenú za výrazom VII(3.1). Predstavme si, že by sme nahradili $\vec{A}_M(\vec{r},t) \leftarrow \vec{A}(\vec{r},t) + \text{grad}\,\psi(\vec{r},t)$. Aby sa po tejto náhrade nezmenil vzťah VII(3.4), museli by sme súčasne nahradiť pôvodný potenciál $\varphi_M(\vec{r},t) \leftarrow \varphi(\vec{r},t) - \partial\psi(\vec{r},t)/\partial t$, ako si to možno overiť priamo dosadením. Oveľa zaujímavejšia je ale možnosť takej voľby, aby $\varphi(\vec{r},t) = \partial\psi(\vec{r},t)/\partial t$; $\psi(\vec{r},t)$ - je ľubovoľná funkcia, pri ktorej fakticky nahrádzame nulou potenciál $\varphi_M(\vec{r},t) \leftarrow 0$. Potom namiesto VII(3.4) môže platiť: $\vec{E}(\vec{r},t) = -\partial\vec{A}_M(\vec{r},t)/\partial t$, pričom $\vec{A}_M(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \text{grad}\int\varphi(\vec{r},t)\text{d}t$ a súčasne $\varphi_M(\vec{r},t) \leftarrow 0$.

Vlnová rovnica pre dynamické potencialy

Teraz by sme mali pomocou nových tzv. dynamickych potencialov $\varphi(\vec{r},t)$ a $\vec{A}(\vec{r},t)$ dostať z Maxwellových rovníc obdobu rovnice Poissonovej resp. Laplaceovej, ktorým vyhovovujú statické potenciály $\varphi(\vec{r})$ a $\vec{A}(\vec{r})$ v stacionárnom poli. Aby sme to docielili, budeme upravovať prvú a tretiu Maxwellovu rovnicu (druhú a štvrtú sme už využili). Ako predtým, nech ε, μ

aj κ sú konštanty. Násobme prvú Maxwellovu rovnicu: $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_v + \partial\vec{D}/\partial t$, konštantou μ, dosadíme $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ a použijeme opäť modifikáciu $\vec{J} = \vec{J}_0 + \kappa\vec{E}$, (kde $\vec{J}_0$ nech pochádza od externého zdroja prúdu) a potom namiesto $\vec{E}$ napíšeme pravú stranu rovnice VII(3.4), bude

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}_0 + \kappa\mu\left(-\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \qquad \text{VII.(3.5)}$$

uvážili sme pritom, že $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Teraz použijeme VII(3.1) a známu identitu: $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\vec{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$. Vo výraze VII(3.5) ponecháme na pravej strane člen $\mu\vec{J}_0$ a zlúčime tam všetky členy, ktoré obsahujú operáciu gradientu . Ostatné členy prídu na ľavú stranu

$$-\nabla^2\vec{A} + \kappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{J}_0 - \mathrm{grad}\left(\kappa\mu\varphi + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A}\right) \qquad \text{VII.(3.6)}$$

Posledná rovnica nadobudne prijateľný tvar, ak teraz účelne zvolíme divergenciu vektorového potenciálu, ako sme to diskutovali vyššie.

Lorentzova (kalibračná) podmienka

Ak vyberieme

$$\mathrm{div}\vec{A} = -\mu\left(\kappa\varphi + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \qquad \text{VII.(3.7)}$$

bude výraz z ktorého sa má v VII(3.6) počítať gradient, identicky nulový. Pri splnení tejto, tzv. Lorentzovej podmienky, dostávame pre vektorový dynamický potenciál rovnicu:

$$\nabla^2\vec{A} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_0 \qquad \text{VII.(3.8)}$$

ktorá v prípade nulovej derivácie podľa času, (stacionárne pole) je rovnicou Poissonovou a ak $J_0 = 0$, prechádza v rovnicu Laplaceovu. Možno sa čitateľ pozastaví nad skutočnosťou, že keby sme nemodifikovali vektor prúdovej hustoty $\vec{J}_v$, na pravej strane VII(3.8) by sa neobjavil člen $-\mu\vec{J}_0$, a bolo by po súlade. Uvedomme si, že aj v stacionárnom poli, na pravej strane Poissonovej rovnice bola vo všetkých prípadoch ktoré sme vyšetrovali, práve hustota vnúteného, nezávislého prúdu, ktorý nebol výsledným poľom nijako ovplyvňovaný. Všimneme si tiež, že keby sme použili náhrady potenciálov v zmysle diskusie za vzťahom VII(3.4), bolo by v VII(3.7) $\varphi \equiv 0$, a odtiaľ, $\mathrm{div}\vec{A} = 0$. Do tretej Maxwellovej rovnice $div\vec{D} = q_v$, dosadíme opäť $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, a namiesto $\vec{E}$ napíšeme pravú stranu rovnice VII(3.4), označíme: $\nabla^2 \equiv \mathrm{div\,grad}$ a po zámene poradia divergencie a derivácie podľa času pri člene s $\vec{A}$, máme

$$\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) = -\frac{q_v}{\varepsilon} \qquad \text{VII.(3.9)}$$

S využitím Lorentzovej podmienky VII(3.7) dostaneme z poslednej rovnice pre skalárny potenciál rovnicu s takou istou ľavou stranou aká je aj v rovnici VII(3.8), ktorú má spĺňať vektorový potenciál.

$$\nabla^2\varphi - \kappa\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{q_v}{\varepsilon} \qquad \text{VII.(3.10)}$$

V stacionárnom poli, opäť, prechádza VII(3.10) v rovnicu Poissonovu, resp. Laplaceovu, s patričnou hustotou (z hľadiska poľa vnúteného) volneho náboja, ktorého priestorové rozloženie však, (na rozdiel od $\vec{J}_0$) od tvaru poľa závisí.

Riešenie vlnovej rovnice v bezstratvom prostredí

V bezstratovom prostredí, ako napríklad vo vákuu, alebo v suchom neionizovanom vzduchu, prípadne v ideálnom dielektriku, alebo v magnetiku, kde $\kappa = 0$, nadobúdajú rovnice VII(3.8) a VII(3.10) podobný tvar ako rovnice VII(1.10)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_0, \qquad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{q_v}{\varepsilon} \qquad \text{VII.(3.11,3.12)}$$

kde $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$, pričom $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ a ε, μ - sú relatívna permitivita a permeabilita daného prostredia. Lorentzova (tiež tzv. kalibračná) podmienka namiesto VII(3.7) teraz bude: $\mathrm{div}\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Rovnice VII(3.11), VII(3.12) sa nazývajú rovnicami d'Alembertovymi. Podobne ako VII(3.8) a VII(3.10) aj d'Alembertove rovnice sú vlnovými rovnicami s riešeniami typu: $f(t \pm r/v)$, pozri Dodatok (3.05). Riešenie týchto nehomogénnych rovníc (rovníc s pravou stranou) odhadneme intuitívne, zo známeho riešenia rovníc Poissonových v stacionárnom poli. Dôkaz o správnosti riešenia je napríklad v [2], [4]. Nech je poloha bodu, v ktorom hľadáme riešenie určená vektorom $\vec{r}$, a poloha elementárneho objemu obsahujúceho zdrojovú veličinu, q_v alebo $\vec{J}_0$, nech má polohový vektor $\vec{r}\,'$, takže ich vzájomná vzdialenosť je: $R(\vec{r},\vec{r}\,') = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$, (pozri obr.VII.3.). V stacionárnom poli a v neohraničenom priestore sú riešenia príslušných rovníc VII(3.11) a VII(3.12) dané integrálmi,

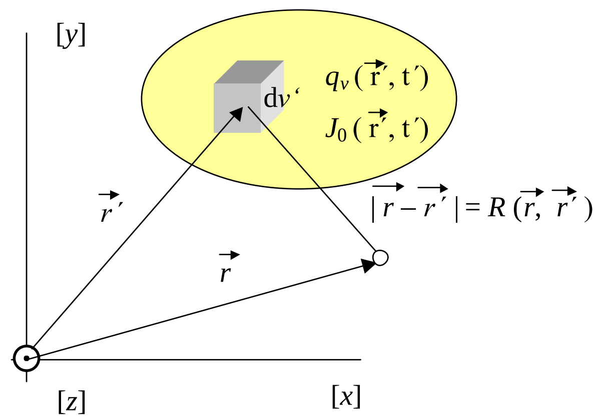
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega \frac{q_v(\vec{r}\,')}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\vec{J}_0(\vec{r}\,')}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v'$$

ktoré sú v podstate vyjadrením princípu superpozície a ten sa musí zachovať aj v časovo premenlivom poli. Avšak v nestacionárnom prípade musí byť toto riešenie závislé od času. Jednoduché zavedenie času, ako premennej, do týchto rovníc by bolo ekvivalentné s predstavou, že ľubovoľná zmena zdrojových veličín q_v, alebo $\vec{J}_0$ v mieste $\vec{r}\,'$ sa v mieste $\vec{r}$ prejaví okamžite. To je v rozpore so skúsenosťou, podľa ktorej sa každý rozruch elektromagnetického poľa (v súlade s riešením napr. rovníc typu VII(1.10) šíri konečnou rýchlosťou.

<u>*Retardované potenciały*</u>

Hodnota, ktorú nadobúda (neustále sa meniaca) zdrojová *veličina v mieste* $\vec{r}\,'$ *v okamihu* t, *môže sa svojim účinkom v* mieste $\vec{r}$ prejaviť až o $\Delta t = \frac{R(\vec{r},\vec{r}\,')}{v}$, kde $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ je rýchlosť postupu vĺn v danom prostredí. So zreteľom na to, že riešenie uvedených diferenciálnych rovníc je typu $f(t \pm r/v)$, oprávnene sa možno domnievať, že reálne riešenie VII(3.11) a VII(3.12) v nestacionárnom poli je

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega \frac{q_v(\vec{r}\,',t')}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v', \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\vec{J}_0(\vec{r}\,',t')}{R(\vec{r},\vec{r}\,')}\mathrm{d}v' \qquad \text{VII.(3.13,3.14)}$$



Obr.VII.3. Retardovaný potenciál

kde sme označili: $t' = t - \Delta t = t - R(\vec{r},\vec{r}\,')/v$. Potenciály VII(3.13) a VII(3.14) nazývame retardovane potenciály.

Z dvoch možných znamienok vo výraze $f(t \pm r/v)$ sme vybrali pre riešenie (ktoré sme označili ako reálne) znamienko minus. To zodpovedá reálnej situácii, kedy je následok oneskorený za príčinou. V čisto matematickom ponímaní je možné narábať aj s riešeniami v ktorých vystupuje znamienko plus. Potom hovoríme o avanceovanom potenciáli (retardovany = oneskorený, avanceovany = predbiehajúci). Ak je oneskorenie $\Delta t = (\vec{r}, \vec{r}\,')/v$ zanedbatelne malé, môžeme za cenu straty na presnosti riešenia položiť: $t' = t$, čo zodpovedá potenciálom okamžite sledujúcim zmeny zdrojových veliličín. <u>Takým približným riešením je napríklad i použitie Biot-Savartovho zákona, alebo zákona prietoku na výpočet indukcie magnetického poľa pri striedavom prúde</u>. Že je to skutočne tak, uveríme, až keď sa ukáže, že podobné riešenie ako VII(3.13) a VII(3.14) platí v časovo premenlivom poli aj pre ostatné vektory poľa: $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$. Inými slovami, ak sa ukáže, že i tieto vektory vyhovujú vlnovej rovnici typu VII(3.8) resp. VII(3.10). To však ukážeme veľmi ľahko. Vypočítame rotáciu oboch strán rovnice VII(3.8) a zameníme poradie operácie rot a ∇^2, čo je iste dovolené, keďže ∇^2 je skalárny operátor. Podobne ako je dovolená zámena rot a derivácií podľa času, ktorú taktiež urobíme. Nakoniec namiesto $\mathrm{rot}\vec{A}$ napíšeme vektor $\vec{B}$

$$\nabla^2 \vec{B} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \mathrm{rot}\vec{J}_0 \qquad \text{VII.(3.15)}$$

Keďže $\vec{B} = \mu \vec{H}$, až na malú zmenu na pravej strane, bude takej istej rovnici vyhovovať aj vektor $\vec{H}$. Vypočítame gradient oboch strán rovnice VII(3.10) a vymeníme poradie operácií podobne ako v predchádzajúcom prípade. Pozor, tentokrát nemôžeme dosadiť $\vec{E}$ namiesto $-\mathrm{grad}\varphi$! Podľa VII(3.3): $-\mathrm{grad}\varphi = \vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$. Pri úprave sa nám eše raz "objaví" rovnica VII(3.8), takže po troche námahy nachádzame

$$\nabla^2 \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{grad} q_v + \mu \frac{\partial \vec{J}_0}{\partial t} \qquad \text{VII.(3.16)}$$

Vzhľadom na vzťah $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, dostaneme rovnicu s takou istou ľavou stranou aj pre vektor $\vec{D}$, opäť s mierne pozmenenou pravou stranou. V časovo premenlivom poli vyhovujú vlnovej rovnici vektorové funkcie poľa $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$, vektorový $\vec{A}$ aj skalárny φ potenciál. To, ktorá z rovníc je pri riešení výhodnejšia, často závisí od zložitosti pravej strany v konkrétnom prípade (pri jednotlivých rovniciach je rozličná) Riešením vlnových rovníc, ktoré obsahujú aj člen s prvou deriváciou podľa času (ak $\sigma \neq 0$) sa tu nebudeme zaoberať. Nakoniec, so zreteľom na úplne rovnaký tvar ľavých strán vlnových rovníc zavedieme skalárny (tzv. d'Alembertov) operátor:

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \text{VII.(3.17)}$$

pomocou ktorého zapíšeme, napríklad homogénnu vlnovú rovnicu pri $\sigma = 0$ pre ľubovoľnú vektorovú funkciu $\vec{F}(\vec{r})$ v tvare: $\Box\vec{F}(\vec{r}) = 0$. Podobe môžeme zapísať aj VII.(3.15) a VII.(3.16) (v prípade že $\sigma = 0$), ako $\Box\vec{B}(\vec{r}) = -\mu \mathrm{rot}\vec{J}_0$ a $\Box\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad} q_v + \mu \frac{\partial \vec{J}_0}{\partial t}$.

<u>*Hertzove vektory*</u>

Možno je načase urobiť istú inventuru . Máme štyri Maxwellove rovnice a štyri vektory poľa $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ medzi ktorými sú väzby $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ a prípadne ešte vzťah $\vec{J} = \kappa\vec{E}$, ak je prostredie vodivé. Môžeme si vybrať dva z vektorov, (napr. $\vec{E}, \vec{B}$) čo je šesť skalárnych funkcií, pre ktoré máme štyri rovnice. Ovšem dve z nich sú vektorové (ekvivalentné šiestim skalárnym rovniciam) a dve sú skalárne ($\mathrm{div}\vec{D} = q_v$ a $\mathrm{div}\vec{B} = 0$). To je celkom osem rovníc pre šesť funkcií. V skutočnosti sú však obidve skalárne rovnice (ako sme to videli v VII.1) len začiatočnými podmienkami. Tak máme nakoniec súhlasný počet rovníc a neznámych funkcií, totiž práve šesť. Pokračujme ďalej. Po zavedení dynamických potenciálov $\varphi, \vec{A}$ sú tu štyri neznáme funkcie: skalár φ a tri zložky vektorového potenciálu $\vec{A}$, ktoré vyhovujú rovnakej vlnovej rovnici, tieto nie sú ale nezávislé. Skalárna väzba VII(3.7) tzv. Lorentzova podmienka redukuje počet neznámych na tri skalárne funkcie. Musí preto existovať jeden, jediný vektor, ktorý vyhovuje vlnovej rovnici a je dostatočný na opis elektromagnetického poľa ! Je to Hertzov, tzv. $\vec{\Pi}$ vektor. Ak tak, ako z potenciálov $\varphi, \vec{A}$ dostávame vektory $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, chceme z vektora $\vec{\Pi}$ dostať potenciály $\varphi, \vec{A}$, máme priamočiaru možnosť voľby . Nech

$$\varphi = -\mathrm{div}\vec{\Pi} \qquad \text{VII.(3.18)}$$

na základe čoho "urobíme" z istej vektorovej funkcie skalárnu funkciu. Okrem divergencie, ako vždy, máme ešte možnosť zvoliť ("rozumným" spôsobom) jeho rotaciu, ak má byť vektor $\vec{\Pi}$ jednoznačne definovaný. Toto však nie je jediná cesta, a tu sa jej ani nebudeme držať. Ďalšiu rovnicu, ktorú má vektorová funkcia $\vec{\Pi}$ spĺňať, vyberieme tak, aby bola súčasne splnená aj Lorentzova podmienka VII(3.7). Jednoducho dosadíme VII(3.18) do VII(3.7) a po zámene poradia operácií div a $\partial/\partial t$ operáciu divergencie na oboch stranách rovnice "vynecháme". Bude

$$\vec{A} = \kappa\mu\vec{\Pi} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} \qquad \text{VII.(3.19)}$$

Nakoniec by sme mali ukázať, že aj vektor $\vec{\Pi}$ vyhovuje vlnovej rovnici. Najjednoduchšie,čo Vás iste napadne, je dosadiť VII(3.19) priamo do VII(3.8). S využitím formalizmu VII(3.17), dostávame

$$\left(\kappa\mu + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\square\vec{\Pi} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}\right) = -\mu\vec{J}_0 \qquad \text{VII.(3.20)}$$

Vidíme, že pri nulovej hodnote prúdu vnúteného externým zdrojom (keďže prvá zo zátvoriek nemôže buť nulová), vyhovuje Hertzov $\vec{\Pi}$ vektor homogénnej vlnovej rovnici s ľavou stranou typu VII(3.8) resp. VII(3.15): $\square\vec{\Pi} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} = 0$. So zreteľom na VII(3.18), ak vyhovuje vektor $\vec{\Pi}$ „len“ homogénnej rovnici, nemôže skalárny potenciál φ vo všeobecnosti spĺňať „aj“ nehomogénnu rovnicu. Jeho použitie je preto obmedzené na prípady, keď v prostredí, v ktorom má byť riešenie vyjadrené pomocou vektora $\vec{\Pi}$, je objemová hustota voľného náboja q_v nulová, a netečú v ňom prudy vnútené vonkajšími zdrojmi ($\vec{J}_0 \equiv 0$). Také vlnenie sa vyskytuje napríklad v okolí vyžarujúcich antén (nie však priamo ich telese, kde $\vec{J}_0 \neq 0$).

Zvážme teraz ešte inú možnosť definície Hertzovho vektora, ktorý, na rozdiel od predchádzajúcho prípadu $\vec{\Pi} \equiv \vec{\Pi}_e$, tu označíme $\vec{\Pi}_m$. Ak pripomenieme, že vďaka platnosti rovnice $\mathrm{div}\vec{B} \equiv 0$ sme mohli položiť $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}_e$ (zo zjavných príčin tu napíšeme $\vec{A}_e$ namiesto $\vec{A}$), iste pripustíte, že ak platí div $\mathrm{div}\vec{D} \equiv 0$, čo je splnené tam, kde $q_v = 0$, môžeme položiť $\vec{D} = \mathrm{rot}\vec{A}_m$. Nový vektorový potenciál $\vec{A}_m(\vec{r},t)$ bude hrať podobnú úlohu ako prv zavedený vektorový potenciál teraz už označený ako $\vec{A}_e(\vec{r},t)$. Teraz z prvej Maxwellovej rovnice VII(1.11) dostávame $\mathrm{rot}\left(\vec{H} + \partial\vec{A}_m/\partial t\right) = \vec{J}_v$, čo v prípade že $\vec{J}_v = 0$, umožňuje zaviesť skalárny potenciál $\varphi_m(\vec{r},t)$ tak, že: $-\mathrm{grad}\varphi_m(\vec{r},t) = \vec{H} + \partial\vec{A}_m/\partial t$. Využívame, teraz takisto ako aj predtým, dve identity div rot $\equiv 0$ a rot grad $\equiv 0 \equiv 0$. Keď opäť položíme $\varphi_m = -\mathrm{div}\vec{\Pi}_m$ a podobne ako pri VII(3.19), (ale teraz je $\vec{J}_v = 0$, takže aj $\kappa = 0$) kladieme $\vec{A}_m = \varepsilon\mu\,\partial\vec{\Pi}_m/\partial t$, definovali sme nový Hertzov vektor $\vec{\Pi}_m$. Tento vektor vyhovuje homogénnej vlnovej rovnici typu $\square\vec{\Pi}_m = 0$, ktorej vyhovujú aj potenciály $\varphi_m(\vec{r},t), \vec{A}_m(\vec{r},t)$. Oba potenciály tiež spĺňajú Lorentzovu podmienku: $\mathrm{div}\vec{A}_m + \varepsilon\mu\partial\varphi_m/\partial t = 0$. Analogickým postupom sa tiež možno presvedčiť, že pomocou *magnetizacneho vektora* $\vec{\Pi}_m(\vec{r},t)$ sú vyjadrené vektory poľa podobnými rovnicami ako v prípade polarizačného vektora $\vec{\Pi}_e(\vec{r},t)$ (r,t). Prvý Hertzov vektor $\vec{\Pi}_e$ možno totiž dať do súvisu s polarizáciou látky a druhý $\vec{\Pi}_m$ s jej magnetizáciou. Podrobnosti nájde záujemca napríklad v [1],[3],[4]. Ak bude $\vec{B} = \mu\vec{H}$, kde μ -je konštanta, avšak $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_0$, kde $\vec{P}_0$ - je vektor vnútenej polarizácie (t.j. nezávislej od hodnoty intenzity $\vec{E}$ v danom prostredí) a teda ε nemá význam materiálovej konštanty, pri $q_v = 0, J_v = 0$ (t.j. pri $\kappa = 0$) vyhovuje $\vec{\Pi}_e$ vektor vlnovej rovnici

$$\nabla^2\vec{\Pi}_e - \varepsilon_0\mu\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}_0}{\varepsilon_0} \qquad \text{VII.(3.21)}$$

Naopak, ak je $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, kde ε -je konštanta, ale $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0$, pričom $\vec{M}_0$ - je vektor vnútenej magnetizácie (t.j. nezávislej od hodnoty intenzity $\vec{H}$ v danom prostredí), takže μ už nemá význam materiálovej konštanty, pri $q_v = 0, J_v = 0$ (t.j. pri $\kappa = 0$) vyhovuje $\vec{\Pi}_m$ vektor vlnovej rovnici:

$$\nabla^2\vec{\Pi}_m - \varepsilon\mu_0\frac{\partial^2\vec{\Pi}_{mn}}{\partial t^2} = -\vec{M}_0 \qquad \text{VII.(3.22)}$$

Čitateľ si iste uvedomil, že v rovniciach VII(3.21) a VII(3.22) vystupujú konštanty ε_0, μ_0 v kombinácii s konštantami ε, μ Táto zmena súvisí so zavedením výrazov $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_0$ a $\vec{B} = \mu\vec{H}$ resp. $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0$ a $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ pri odvodzovaní

VII(3.21) resp. VII(3.22). Poznamenávame, že sa pritom musia pozmeniť aj kalibračné podmienky VII(3.7) na tvar $\mathrm{div}\vec{A}_e + \varepsilon_0\mu\partial\varphi_e / \partial t = 0$ resp. $\mathrm{div}\vec{A}_m + \varepsilon\mu_0\partial\varphi_m / \partial t = 0$. Potenciály a vektory poľa potom pomocou Hertzových vektorov vyjadríme takto

$$\begin{array}{ll} \vec{\Pi}_e - \textit{polarizačný vektor} & \vec{\Pi}_m - \textit{magnetizačný vektor} \\ \varphi_e = -\mathrm{div}\vec{\Pi}_e & \varphi_m = -\mathrm{div}\vec{\Pi}_m \\ \vec{A}_e = \kappa\mu\,\vec{\Pi}_e + \varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t} & \vec{A}_m = \varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t} \end{array} \qquad \text{VII.(3.23)}$$

$$\begin{array}{ll} \vec{B} = \kappa\mu\;\mathrm{rot}\vec{\Pi}_e + \varepsilon\mu\;\mathrm{rot}\dfrac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t} & \vec{D} = \varepsilon\mu\;\mathrm{rot}\dfrac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t} \\ \vec{E} = \mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\vec{\Pi}_e & \vec{H} = \mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\vec{\Pi}_m \end{array} \qquad \text{VII.(3.24)}$$

Ako pomerne jednoducho nájdeme z výrazov pre $\vec{B},\vec{E}$, VII(3.1) a VII(3.4), keď predtým využijeme pri $\vec{\Pi}_e$ výrazy VII(3.18) a VII(3.19) pri úprave výrazu pre $\vec{E}$ aj D(2.03) a VII(3.17), VII(3.20). Postup pri vyjadrovaní vektorov $\vec{D},\vec{H}$ pomocou $\vec{\Pi}_m$ je obdobný. V bezstratovom prostredí ($\kappa = 0$) nadobudnú rovnice VII(3.23) a aj výrazy VII(3.24) pre vektory $\vec{B},\vec{E}$ resp. $\vec{D},\vec{H}$ istý druh symetrie. Môže sa stať, že niekde v odbornej literatúre nájdete magnetizačný Hertzov vektor zavedený iným spôsobom a preto aj inak zviazaný s vektorovým a skalárnym potenciálom (aj tieto budú samozrejme iné). Dotkli sme sa už možnosti takej voľby vektorového potenciálu, aby bolo $\varphi_M(\vec{r}) = 0$ (pozri diskusiu za VII(3.4)), kedy je na základe splnenia Lorentzovej podmienky VII(3.7), $\mathrm{div}\vec{A}_M(\vec{r}) = 0$. Ponechajme index *M*, a uvažujme o možnej definícii Hertzovho vektora, ktorý, na rozdiel od predchádzajúcho prípadu, označíme ako $\vec{\Pi}_M$. Keďže je teraz $\mathrm{div}\vec{A}_M = 0$, nič nám nebráni zopakovať predchádzjúci postup v zmysle VII(3.1), kedy sme využili rovnosť $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Nech

$$\vec{A}_M(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\;\vec{\Pi}_M(\vec{r},t) \qquad \text{VII.(3.25)}$$

tým je všetko vyriešené, lebo pri voľbe VII(3.25) bude identicky splnená rovnosť $\mathrm{div}\vec{A}_M = 0$ a ostáva len dokázať, že aj $\vec{\Pi}_M$ spĺňa vlnovú rovnicu. Dôkaz je jednoduchý, dosaďme VII(3.25) do VII(3.8) uvážime, že $\vec{J}_0 = 0$ a po zámene operácií ∇^2 , $\partial/\partial t$ resp. $\partial^2/\partial t^2$ s operáciou "rot" dostaneme rovnosť

$$\mathrm{rot}\left(\nabla^2\vec{\Pi}_M - \kappa\mu\frac{\partial\vec{\Pi}_M}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\Pi}_M}{\partial t^2}\right) = 0$$

ktorá je iste splnená, ak je nulový výraz v zátvorke (čo tu chceme dokázať). Uvedená rovnosť môže byť, pravdaže, splnená aj za iných okolností, ak bude ale súčasne splnená aj rovnosť,

$$\mathrm{div}\left(\nabla^2\vec{\Pi}_M - \kappa\mu\frac{\partial\vec{\Pi}_M}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\Pi}_M}{\partial t^2}\right) = 0$$

je divergencia aj rotácia tej istej vektorovej funkcie (uvedenej v zátvorke) nulová, v ľubovoľnom (t.j. v každom) bode priestoru čo jednoducho znamená, že aj samotná funkcia je všade rovná nule a Hertzov vektor $\vec{\Pi}_M$ vyhovuje vlnovej rovnici. Platnosť poslednej rovnice plynie zo vzťahu $\varphi_M = -\mathrm{div}\vec{\Pi}_M$ a z vopred vysloveného predpokadu nulovosti funkcie $\varphi_M \equiv 0$. Ako sa možno presvedčiť priamo vykonaním naznačenej operácie, je posledná rovnica splnená preto, lebo každý jej člen je nulový (pritom $\mathrm{div}\nabla^2\vec{\Pi}_M = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{\Pi}_M = \nabla^2\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M = \nabla^2\mathrm{div}\vec{\Pi}_M$). Podobnou úpravou, ako v predošlých prípadoch, nachádzame vzťahy vyjadrujúce vektory poľa pomocou $\vec{\Pi}_M(\vec{r},t)$

$$\vec{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}_M}{\partial t}, \qquad \vec{B} = -\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\vec{\Pi}_M \qquad \text{VII.(3.26)}$$

Všimneme si dôležitý rozdiel, kým pri zavedení $\vec{\Pi}_m$ pomocou $\vec{A}_m,\varphi_m$ bolo nutné aby $J_v = 0$ (t.j. musí byť $\kappa = 0$), pri zavedení $\vec{\Pi}_M$ pomocou $\vec{A}_M,\varphi_M$ (kde ale $\varphi_M \equiv 0$) sme nič podobné požadovať nemuseli, t.j. mohlo byť $J_v \neq 0$ J (t.j. $\kappa \neq 0$). Opäť zdôrazníme, že v každom prípade sa v riešenej oblasti predpokladá absencia voľných nábjov t.j. $q_v = 0$ a nulová hodnota prúdov od vonkajších zdrojov $J_0 = 0$. Význam Hertzových vektorov oceníme najmä pri rieriešení takých úloh, ako je vyžarovanie antén, (pozri článok 5. V kapitole VIII.), alebo pri vyšetrovaní vedenia elektromagnetických vĺn pomocou tzv. vlnovodov.