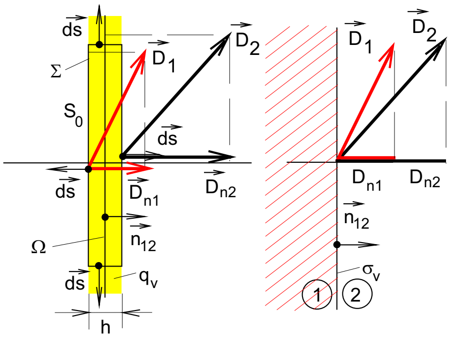
PLOŠNÁ DIVERGENCIA - plošná hustota povrchového náboja σ (σ_v, σ_p, σ_T)

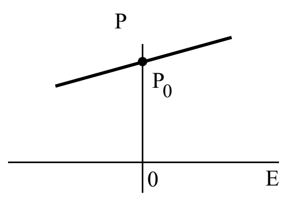


Nekonečne rozľahlá vrstva (doska) s hrúbkou *h* obsahuje voľný elektrický náboj s objemovou hustotou q_v. Počítame výtok vektora $\vec{\mathbf{D}}$ cez povrch Σ ohraničujúci objem Ω tvorený hranolom s hrúbkou *h* a plochou S_0 podľa ľavej časti obrázku

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{s}} = (D_{n2}-D_{n1})S_0 = \iiint_{\Omega} q_v dv = q_v h S_0 \;\Rightarrow\; (D_{n2}-D_{n1}) = q_v h\,.$$

V hranole s hrúbkou *h* a jednotkovou plochou S_0 je množstvo náboja: $q_v h S_0$. Predstavme si, že k-násobne zmenšíme hrúbku vrstvy $h \to h/k$, ale zachováme (dané) množstvo náboja takže sa k-násobne zvýši jeho objemová hustota $q_v \to kq_v$. V limite, pri $h \to 0$ vzrástla by objemová hustota náboja (v "povrchovej" vrstve nulovej hrúbky) cez všetky medze $q_v \to \infty$. Označme súčin ktorý ostáva konštantný $(h/k)(kq_v) \equiv q_v.h$, novým symbolom σ_v. <u>*Plošná hustota povrchového voľného náboja*</u> $\sigma_v \equiv q_v\, h,$ ku ktorej sme takto dospeli je užitočný pojem ak máme riešiť úlohu v okolí (nekonečne tenkého) rozhrania dvoch prostredí 1 a 2, pravá časť obrázku. Podľa uvedeného je: $D_{n2} - D_{n1} = \sigma_v$. Ľahko si overíte, že $\vec{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) \equiv D_{n2} - D_{n1}$. Ak aj operáciu uvedenú na lavej strane poslednej rovnosti označíme novým symbolom $Div\,\vec{\mathbf{D}} \equiv \vec{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1)$, môžeme písať: $\boxed{Div\;\vec{\mathbf{D}} = \sigma_v}$, analogický vzťah, viažúci sa k <u>*objemovej hustote "priestorového" voľného náboja*</u> q_v, už poznáme ako jednu z Maxwellových rovníc $\boxed{div\;\vec{\mathbf{D}} = q_v}$. Dosaďme do oboch vzťahov v rámikoch $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$. Aplikovaním operátora "*div* ", resp. "*Div* " dostávame: $div\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0(div\vec{\mathbf{E}}) + div\vec{\mathbf{P}} = q_v$, resp. $Div\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0(Div\vec{\mathbf{E}}) + Div\vec{\mathbf{P}} = \sigma_v$. Zavedieme veličinu: $-div\;\vec{\mathbf{P}} \equiv q_p$ (s rozmerom C/m^3), ktorú nazveme <u>*objemová hustota (priestorového) polarizačného náboja*</u> , resp. $-Div\;\vec{\mathbf{P}} \equiv \sigma_p$ (s rozmerom C/m^2), ktorú nazveme: <u>*plošná hustota povrchového polarizačného náboja.*</u> Oba takto, formálne zavedené náboje sú teda <u>fiktívne</u>. V prvom prípade: $\varepsilon_0(div\vec{\mathbf{E}}) = q_v + q_p \equiv q_T$, kde sme súčet objemovej hustoty priestorového voľného q_v a priestorového polarizačného q_p náboja označili ako objemovú hustotu celkového (totálneho) priestorového náboja q_T, takže $div\vec{\mathbf{E}} = q_T / \varepsilon_0$. Podobne v druhom prípade: $\varepsilon_0(Div\vec{\mathbf{E}}) = \sigma_v + \sigma_p \equiv \sigma_T$, súčet plošných hustôt povrchového voľného σ_v a povrchového polarizačného σ_p náboja označímne ako plošnú hustotu celkového (totálneho) povrchového náboja σ_T, pričom: $Div\vec{\mathbf{E}} = \sigma_T / \varepsilon_0$. Predpokladajme že ε je konštanta v takom (lineárnom) prostredí je polarizácia priamoúmerná intenzite pôsobiaceho poľa $\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{\mathbf{E}}$. Na základe rovností: $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$, aplikovaním operátorov "*div*" resp. "*Div*", dostaneme: $q_v = q_T - q_p = (1+\chi_E)q_T = \varepsilon_r q_T$ resp. $\sigma_v = \sigma_T - \sigma_p = (1+\chi_E)\sigma_T = \varepsilon_r \sigma_T$. Ľahko sa odvodia vzťahy: $q_p = q_v(1/\varepsilon_r\text{-}1)$, $q_T = q_v / \varepsilon_r$ resp. $\sigma_p = \sigma_v(1/\varepsilon_r\text{-}1)$, $\sigma_T = \sigma_v / \varepsilon_r$, z ktorých je zrejmé že hodnotou q_v resp. σ_v sú pri známom ε_r jednoznačne určené hodnoty q_p, q_T resp. σ_p, σ_T. Celkom iná je situácia ak permitivita ε nie je konštanta. Napríklad, ak sa v dielektriku udrží istá (remanentná, zvyšková) polarizácia, aj potom keď prestal pôsobiť vonkajší zdroj pola, a pri nulovej intenzite $\vec{\mathbf{E}}$ je nenulová polarizácia $\vec{\mathbf{P}}$. Ani objemová hustota priestorového q_p ani plošná hustota povrchového σ_p <u>*polarizačného náboja*</u> nie sú priamo určené hodnotami objemovej hustoty priestorového q_v, resp. plošnej hustoty povrchového σ_v <u>*voľného náboja*</u>. Hustoty q_p, σ_p možu byť napríklad nenulové aj keď $q_v = 0$ alebo $\sigma_v = 0$.

Pri závislosti polarizácie dielektrika od pôsobiaceho poľa napríklad podľa obrázku vpravo je: $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \underbrace{\vec{\mathbf{P}}_0 + \varepsilon_0\chi_E\vec{\mathbf{E}}}_{\vec{\mathbf{P}}} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}_0 = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}_0$, $div\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r(div\vec{\mathbf{E}}) + div\vec{\mathbf{P}}_0$ a objemová husota <u>fiktívneho</u> priestorového náboja $q_p = -div\vec{\mathbf{P}}_0$ závisí len od toho aká (homogénna - nehommogénna, veľká - malá) je remanentná polarizácia $\vec{\mathbf{P}}_0$ v objeme dielektrika a nie od prítomnosti a rozloženia priestorového voľného náboja ktorého hustota q_v je za "normálnych " okolností v dielektriku dokonca nulová. Podobne, na základe $Div\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r(Div\vec{\mathbf{E}}) + Div\vec{\mathbf{P}}_0$, $\sigma_v = \varepsilon_r\sigma_T - \sigma_p$, kde $\sigma_p = -Div\vec{\mathbf{P}}_0$ závisí od toho, aký je rozdiel normálových zložiek polarizácie na povrchu dielektrika a okolitého prostredia - teda aj od <u>tvaru</u> dielektrického telesa. Prítomnosť povrchového náboja (na povrchu dielektrika) je výnimočná a zvyčajne $\sigma_v = 0$.



$P = P_0 + \varepsilon_0 \chi_E E$