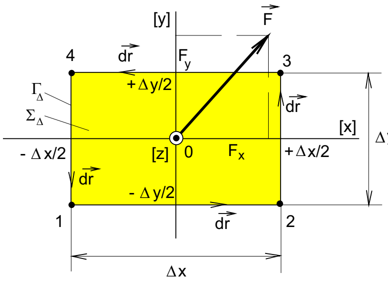
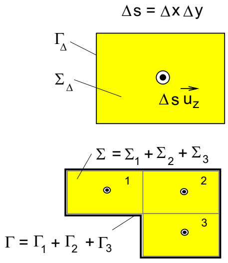
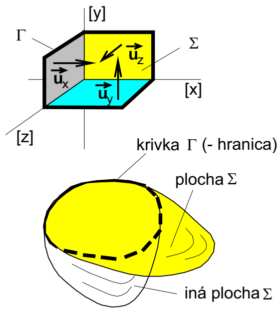
ROTÁCIA







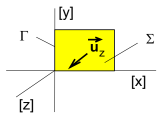
Počítajme cirkuláciu po (uzavretej) krivke Γ (1–2–3–4–1) ohraničujúcej plochu $\Delta s = \Delta x \Delta y$, v rovine $z = 0$, a výsledok delme veľkosťou tejto plochy:

$$\frac{1}{\Delta s}\oint_{\Gamma_\Delta}\vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} \approx \frac{1}{\Delta s}\left(F_x(-\frac{\Delta y}{2})\Delta x + F_y(\frac{\Delta x}{2})\Delta y - F_x(\frac{\Delta y}{2})\Delta x - F_y(-\frac{\Delta x}{2})\Delta y\right) = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta F_y \Delta y - \Delta F_x \Delta x\right) =$$

$$= \frac{\Delta F_y}{\Delta x} - \frac{\Delta F_x}{\Delta y}$$ keď sme označili: $$\Delta F_y = F_y(\frac{\Delta x}{2}) - F_y(-\frac{\Delta x}{2}),\quad \Delta F_x = F_x(\frac{\Delta y}{2}) - F_x(-\frac{\Delta y}{2})$$

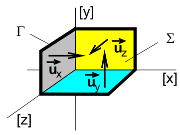
vzhľadom na skalárny súčin dávajú pri výpočte v rovine $z = 0$, ($d\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{u}}_z ds$) nenulový príspevok len zložky F_x a F_y vektora: $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{u}}_x F_x + \vec{\mathbf{u}}_y F_y + \vec{\mathbf{u}}_z F_z$. Ak sa bude veľkosť plochy Σ, na hranici (Γ) ktorej sme integrovali blížiť k nule $\Delta s \to ds$, následne $\Delta F/\Delta x \to \partial F/\partial x$, $\Delta F/\Delta y \to \partial F/\partial y$, takže:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\oint_{\Gamma_\Delta}\vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \boxed{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{u}}_z} \cdot \vec{\mathbf{u}}_z = \boxed{rot_z \vec{\mathbf{F}}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_z$$



takto je definovaná "z-ová" rotácia $rot_z\vec{\mathbf{F}}$. (Poznámka: $\vec{\mathbf{u}}_z \cdot \vec{\mathbf{u}}_z \equiv 1$) . Po vykonaní rovnakej úvahu a výpočtov (cirkulácií) v rovinách $y = 0$ a $x = 0$, (stačí uplatniť na vyššie uvedený vzorec cyklickú zámenu indexov) dostaneme tri zložky ktoré tvoria vektor

$$rot\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{u}}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{u}}_y + \boxed{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{u}}_z}$$



symbolický ho zapíšeme pomocou NABLA operátora ($\vec{\nabla}$) takto

$$rot\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{u}}_z\right)\times\left(\vec{\mathbf{u}}_x F_x + \vec{\mathbf{u}}_y F_y + \vec{\mathbf{u}}_z F_z\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}_x & \vec{\mathbf{u}}_y & \vec{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Predcházajúci vzťah s limitou nadobudne tvar v ktorom sú (namiesto $\Delta s = \Delta x \Delta y$) postupne započítané jednotlivé elementy (dostatočne malej) plochy, vo všeobecnosti: $\Delta\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{u}}_x \Delta y \Delta z + \vec{\mathbf{u}}_y \Delta z \Delta x + \vec{\mathbf{u}}_z \Delta x \Delta y = \vec{\mathbf{n}}\Delta s$

$$\boxed{\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\oint_{\Gamma_\Delta}\vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} \equiv rot\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\underbrace{\vec{\mathbf{u}}_x\cdot\vec{\mathbf{u}}_x}_{1} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\underbrace{\vec{\mathbf{u}}_y\cdot\vec{\mathbf{u}}_y}_{1} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\underbrace{\vec{\mathbf{u}}_z\cdot\vec{\mathbf{u}}_z}_{1}$$

keďže ľubovolná plocha može byť "poskladaná" z elementov typu $\Delta\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{n}}\Delta s$, z posledného výrazu vyplýva rovnosť (STOKES)

$$\oint_\Gamma \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = \iint_\Sigma rot\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \quad\leftarrow\quad \sum_{\text{cez elementy }\Delta s} rot\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\Delta s$$

krivka Γ (zjednotenie elementárnych kriviek Γ_Δ) je vo všeobecnosti priestorová krivka (neleží v rovine) a plocha Σ je ľubovolná (priestorová) plocha k tejto krivke upnutá len svojou hranicou. Ku každej krivke Γ existuje nekonečne veľa rôznych plôch Σ - tieto plochy majú spoločnú len hranicu (Γ), na obázku pozri časť vpravo dole.