Riešenie 2D Laplaceovej rovnice separáciou premenných v sférickej sústave, pri $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0$

$$\Delta\varphi(r,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

$$\varphi(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 R'\Theta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta R\Theta'\right) = 0, \quad r \neq 0$$

$$\frac{\Delta\varphi}{R\Theta} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 R'\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 R'\right) = k^2 \quad \Rightarrow \quad R_n(\rho) = ar^n + br^{-(n+1)}, \quad k^2 = n(n+1) \\ \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\Theta'\right) = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_n(\vartheta) \equiv cP_n(z) \\ P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}r^n}(t^2-1), \quad t = \cos\vartheta \\ \text{LEGENDRE} - \textit{ove polynómy} \\ P_0 = 1 \\ P_1 = \cos\vartheta \\ P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \\ P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\varphi_0(r) = A_0 + \frac{B_0}{r}$$

$$\varphi_n(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta), \quad n = 1,2,3,\ ...$$

$$\varphi_n(r,\vartheta) = \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\vartheta)$$

Všeobecné riešenie potom je:

$$\varphi(r,\vartheta) = \varphi_0(r,\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(r,\vartheta)$$

$$\varphi(r,\vartheta) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n a_n P_n(\cos\vartheta), \quad \text{pri } r<r_0$$

$$\varphi(r,\vartheta) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} a_n P_n(\cos\vartheta), \quad \text{pri } r_0<r$$

a zo známeho priebehu pri $r_0 = r$, $\varphi(\rho_0,\psi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos\vartheta)$ určíme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\rho_0,\psi)\mathrm{d}\vartheta, \quad a_{\mathrm{n}} = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\varphi(\rho_0,\psi)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta$$

konštanta b_0 bude nenulová len vtedy, ak je v mieste $r = 0$ prítomný singulárny zdroj zdroj (napríklad bodový náboj).