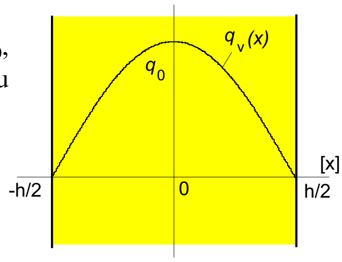
Príklad **1** *(2+2+2+5 = 11 bodov)*

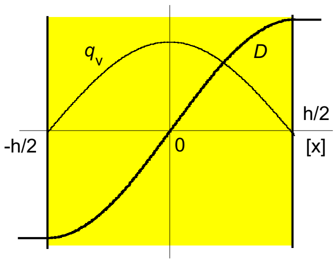
V nekonečne rozľahlej dielektrickej doske s hrúbkou *h,* (permitivita ε, permeabilita μ_0, nulová vodivosť κ) je vnútené priestorové rozloženie voľného náboja s objemovou hustotou : $q_V(x) = q_0 \cos(\pi x/h)$.



a) Popíšte niekoľko postupov ako možno stanoviť závislosti:
 φ(x,y,z), ***E****(x,y,z),* ***D****(x,y,z),* v objeme dosky a v jej okolí … *(2+2+2 bodov)*

b) Riešte úlohu ľubovolným spôsobom! … *(5 bodov)*

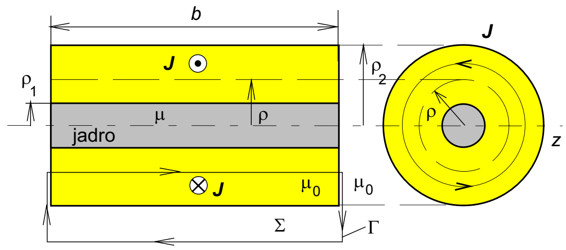
(Odporúčanie: *pri riešení využite rovinnú symetriu konfigurácie*).



Maxwellove rovnice (div $D = q_v$), Gaussova veta, Poissonova rovnica - stačí určiť jednu z funkcií *φ(x),* ***E****(x),* ***D****(x).* Ostatné dve určíme z nej. $D = \varepsilon E$, $E = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$. Riešenie: *D* bude mať zložku len do smeru osi *x* a pri $x = 0$, bude $D = 0$ (symetria!). Pri $|x|<h/2$: div $D = \mathrm{d}D/\mathrm{d}x = q_0 \cos(\pi x/h) \Rightarrow D(x) = k + (hq_0/\pi)\sin(\pi x/h)$, kde $k = 0$. Pri $|x| \geq h/2$, div $D = \mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow D(x) = a + bx$, kde $b = 0$, lebo (Gaussova veta) v okolí nekonečnej dosky bude mať pole *D* (aj *E*) konštantnú veľkosť (smer, po oboch stranách dosky, navzájom opačný). Zo spojitosti normálovej zložky *D* (tu iná nie je) vyplýva v oboch oblastiach rovnaká hodnota: $D(h/2) = (hq_0/\pi)\sin(\pi/2) = hq_0/\pi$. Preto $a = hq_0/\pi$. Ak je permitivita dosky a okolia rôzna, pole *E* sa bude na rozhraní ($|x| = h/2$) meniť skokom. Potenciál má pri $|x|<h/2$ taký istý priebeh ako $q_v(x)$. Pri $|x| \geq h/2$ má lineárny priebeh. Potenciál je v $|x| = h/2$ spojitý. Ak sú permitivita dosky a okolia rôzne (nespojitosť v *E*), jeho derivácia v $|x| = h/2$ je nespojitá.

Príklady **2 - 3**

Dutým (trubkovým) vodičom s vnútorným a vonkajším polomerom ρ_1 a ρ_2 a dĺžkou $b \gg \rho_2$ preteká v čase konštantný (vírivý) prúd *I* vyvolaný vnútenou zmenou magnetického toku Φ cez jadro vypĺňajúce dutinu vodiča. Permeabilita jadra $\mu_r \gg 1$, v ostávajúcej časti priestoru je $\mu_r = 1$. Pri riešení predpokladajte, že $b \to \infty$.



Príklad **2** *(4+3+2= 9 bodov)*

Stanovte:

a) prúdovú hustotu $J(\rho)$ **v tele trubky** ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) …*(4 body)*

b) Jouleove straty *P* **v objeme trubky** *(3 body)*

c) časový priebeh toku $\Phi(t)$ **vnúteného do jadra s prierezom** $S_0 = \pi\rho_1^2$… *(2 body)*

(Odporúčanie: *uvedomte si, že indukovaný prúd je jednosmerný - využite možnosť vyjadriť vodivost (odpor) objemového elementu trubky na základe integrálnych zákonov!)*

Keďže vírivý prúd je jednosmerný (konštantný v čase), je také aj týmto prúdom vyvolané magnetické pole a príslušný magnetický tok. Pole v objeme trubky je stacionárne. Napätie indukované pozdĺž ľubovolnej integračnej dráhy, ktorá obopína jadro, je dané len časovou zmenou vnúteného toku - a je teda v čase konštantné, nezávisí od tvaru a rozmerov tejto dráhy. Súčasne je zrejmé, že vnútený tok (v jadre) sa mení v čase lineárne, teda: $\Phi = Ut$ (kde *U* - je konštanta úmernosti, lebo indukové napätie $U = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$). Ak si predstavíme trubku zloženú z elementov - koaxiálnych trubíc s hrúbkou dρ - na každej z nich musí byť rovnaké (indukované) napätie *U*. Vodivosť jednej elementárnej trubice je: $\mathrm{d}G = \kappa\,\mathrm{d}S/(2\pi\rho)$. Prúd, ktorý tečie elementárnou trubicou je $\mathrm{d}I = U\mathrm{d}G$, a jeho hustota: $J = \mathrm{d}I/\mathrm{d}S = U\mathrm{d}G/\mathrm{d}S = U\kappa/(2\pi\rho)$. Jouleove straty (spôsobené jednosmerým prúdom) stanovíme integráciou ich objemovej hustoty: $JE = J^2/\kappa = U^2\kappa/(2\pi\rho)^2$, v hraniciach od ρ_1 do ρ_2, teda: $P = U^2\kappa b.\ln(\rho_2/\rho_1)/(2\pi)$, keď sme objemový element vyjadrili ako $\mathrm{d}v = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

Príklad **3** *(4+3+4= 11 bodov)*

a) prúdovú hustotu $J(\rho)$ **v trubke** ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) …*(4 body)*

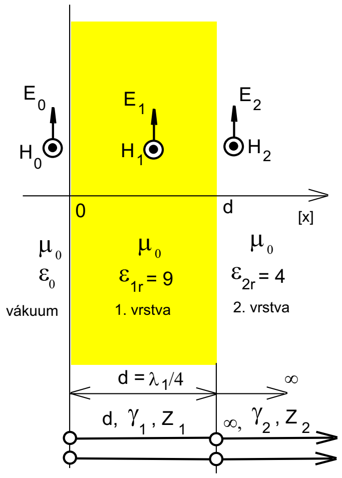
b) intenzitu poľa $\boldsymbol{H}(\rho)$ **v trubke** ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) **a mimo trubky** ($\rho > \rho_2$)…*(3 body)*

c) objemovú hustotu energie magnetického poľa v každej z troch časti priestoru ($\rho < \rho_1$), ($\rho_1 < \rho < \rho_2$), ($\rho > \rho_2$) …*(4 body)* (Odporúčanie: *namiesto riešenia diferenciálnych rovníc - využite integrálny tvar zákonov, vhodná krivka Γ a plocha Σ sú vyznačené na obrázku!)*

Prúd s husotou $J = U\kappa/(2\pi\rho)$ vyvolá na polomere ρ magnetické pole ktorého intenzitu určíme zo zákona prietoku aplikovaného na dráhe Γ podľa obrázku: $bH(\rho) = b\int J\mathrm{d}\rho$, integrujeme od ρ do ρ_2. Na časti integračnej dráhy mimo trubky, pri $\rho > \rho_2$, je pole *H* nulové, lebo trubka je nekonečne dlhá a príspevky na dvoch kratších úsekoch sa navzájom kompenzujú. Pri $\rho_1 < \rho < \rho_2$, v tele trubky, je $H(\rho) = U\kappa\ln(\rho_2/\rho)/(2\pi)$. Objemová hustota energie magnetického poľa je v okolí trubky nulová, v trubke $HB/2 = \mu H^2/2$, kam za *H* treba dosadiť $H(\rho) = U\kappa\ln(\rho_2/\rho)/(2\pi)$. V jadre je hustota energie $HB/2 = B^2/(2\mu)$ daná rozložením hustoty toku Φ v jeho priereze - ak je tok rovnomerný, je $B = \Phi/S_0 = Ut/S_0$.

Príklady 4-5

Rovinná elektromagnetická vlna dopadá z vákua kolmo na ideálne dvojvrstvové dielektrikum *($\kappa = 0$)*. Prvá vrstva, $\varepsilon_{1r} = 9$, má hrúbku štvrťvlnovej dĺžky v danom rostredí *($d = \lambda_1/4$)*, druhá vrstva, $\varepsilon_{2r} = 4$, je v smere šírenia vlny (os x) nekonečná. Premeabilita oboch vrstiev je μ_0.



Príklad **4**	*(2+2+3 = 7 bodov)*

Vyjadrite a vypočítajte:

a) hrúbku prvej vrstvy, ak viete že $f = 100$ GHz …*(2 body)*

b) podiel fázorov $\mathcal{E}_1(d)/\mathcal{H}_1(d)$ na rozhraní medzi prvou a druhou vrstvou dielektrika…*(2 body)*

c) koeficient odrazu na rozhraní medzi prvou a druhou vrstvou dielektrika ρ_{12} …*(3 body)*

Prostredie, ideálne dielektrikum, je bezstratové, preto $\gamma_1 = j\alpha_1 = j\omega\sqrt{(\varepsilon\mu)}$. Fázová konštanta $\alpha_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{1r}}/c$, kde $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)} = 3.10^8$ je rýchlosť svetla vo vákuu. Potom: $d = \lambda_1/4 = (2\pi/\alpha_1)/4 = c\pi/(2\omega\sqrt{\varepsilon_{1r}}) = 3.10^8.\ \pi/(4\pi.10^{11}.3) = 0.25$ mm, keďže pri $f = 100$ GHz je $\omega = 2\pi f = 2\pi\ 10^{11}$ a ε_{1r} a = 9. Podiel fázorov $\mathcal{E}_1(d)/\mathcal{H}_1(d)$ na rozhraní medzi prvou a druhou vrstvou je daný charakteristickou inpedanciou druhej vrstvy, lebo táto vrstva je nekonečná v smere šírenia [x] a existuje v nej len postupná vlna. Je teda $\mathcal{E}_1(d)/\mathcal{H}_1(d) \equiv Z_2 = \sqrt{(\mu_2/\varepsilon_2)} = \sqrt{(\mu_0/\varepsilon_0)}.1/\sqrt{\varepsilon_{2r}} = Z_0/\sqrt{\varepsilon_{2r}} = Z_0/2 = 188.32\Omega$, kde $Z_0 = \sqrt{(\mu_0/\varepsilon_0)} = 376.63\Omega$ je charakteristická impedancia vákua. Koeficient odrazu $\rho_{12} = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1) = (1/2 - 1/3)/(1/2 + 1/3) = (3 - 2)/(3 + 2) = 1/5 = 0.2$, keďže charakteristická impedancia prvej vrstrvy je $Z_1 = = Z_0/\sqrt{\varepsilon_{1r}} = Z_0/3 = 125.54\Omega$.

Príklad **5**	*(5+3+3 = 11 bodov)*

a) podiel fázorov $\mathcal{E}_1(0)/\mathcal{H}_1(0)$ na povrchu dielektrika zo strany vákua …*(5 bodov)*

b) koeficient odrazu na rozhraní vákuum - prvá vrstva dielektrika ρ_{01} …*(3 body)*

c) intenzitu E_d dopadajúcej vlny, ak sa meraním na povrchu dvojvrstvy zistilo, že $H_0(0) = 0.001$ A/m …*(3 body)*

(Odporúčania: *využite analógiu s homogénnym vedením - tak, ako je naznačené v dolnej často obrázku!)*

Vstupná impedancia druhej vrstvy (podiel fázorov $\mathcal{E}_1(d)/\mathcal{H}_1(d)$ na rozhraní medzi prvou a druhou vrstvou) je $Z_{vst2} \equiv Z_2 = Z_0/2$. Vstupná impedancia prvej vrstvy (podiel fázorov $\mathcal{E}_1(0)/\mathcal{H}_1(0)$ na povrchu dielektrika zo strany vákua) je $Z_{vst1} = Z_1(1+\rho_{12}(0))/(1-\rho_{12}(0))$. Vzťah medzi koeficientom odrazu na konci a na začiatku prvej vrstvy (stále ale v objeme prvej vrstvy) je daný vzťahom fázorov intenzity odrazenej a dopadajúcej vlny $\mathcal{E}_r$, $\mathcal{E}_d$ v príslušných miestach (koeficient odrazu v ľubovolnom mieste je definovaný podielom $\rho(x) = \mathcal{E}_r(x)/\mathcal{E}_d(x)$), [vzorce na druhej strane listu zadania]. Z koeficienta odrazu na konci $\rho_{12} \equiv \rho_{12}(d)$ vieme určiť koeficient odrazu na začiatku $\rho_{12}(0) = \rho_{12}(d)\exp(-2\gamma_1 d)$. Dosadíme $2\gamma_1 d = 2j\alpha_1\lambda_1/4 = j\pi$, $\exp(-2\gamma_1 d) = \exp(-j\pi) = \cos\pi - j\sin\pi = -1$. Takže: $\rho_{12}(0) = -\rho_{12}(d) = -0.2$. Je teda: $\mathcal{E}_1(0)/\mathcal{H}_1(0) \equiv Z_{vst1} = Z_1(1+\rho_{12}(0))/(1-\rho_{12}(0)) = (Z_0/3)(1 - 0.2)/(1 + 0.2) = 2Z_0/9 = 83.68\ \Omega$. Vstupná impedancia dielektrickej dvojvrstvy (Z_{vst1}) je zakončujúcou impedanciu ľavého polpriestoru (vákuum). Preto je koeficient odrazu na rozhraní vákuum - prvá vrstva dielektrika: $\rho_{01} = (Z_{vst1} - Z_0)/(Z_{vst1} + Z_0) = (2/9 - 1)/(2/9 + 1) = (2 - 9)/(2 + 9) = 7/11 = 0.6363$. Podobne, ako v prvej vrstve dielektrika, aj v priestore pred dvojvrstvou (vo vákuu) ak bude **fázor** výslednej elektrickej vlny vyjadrený súčtom dopadajúcej a odrazenej vlny $\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_{0d}(x) + \mathcal{E}_{0r}(x)$, a **fázor** magnetickej vlny ich rozdielom: $\mathcal{H}_0(x) = \mathcal{H}_{0d}(x) - \mathcal{H}_{0r}(x)$, je charakteristická impedancia $Z_0 = \mathcal{E}_{0d}(x)/\mathcal{H}_{0d}(x) = \mathcal{E}_{0r}(x)/\mathcal{H}_{0r}(x)$. Môžeme preto (aj pri $x = 0$) písať: $\mathcal{E}_0(0) = \mathcal{E}_{0d}(0) + \mathcal{E}_{0r}(0) = \mathcal{E}_{0d}(0)[1 + \rho_{01}] = \mathcal{E}_{0d}(0)[1 + 7/11]$ a teda: $\mathcal{E}_{0d}(0) = (11/18)\mathcal{E}_0(0)$. Ďalej, keďže $\rho_{01} = \mathcal{E}_{0r}(0)/\mathcal{E}_{0d}(0) = [Z_0\mathcal{H}_{0r}(0)]/[Z_0\mathcal{H}_{0d}(0)] = \mathcal{H}_{0r}(0)/\mathcal{H}_{0d}(0)$, máme na základe $\mathcal{H}_0(0) = \mathcal{H}_{0d}(0) - \mathcal{H}_{0r}(0) = \mathcal{H}_{0d}(0)[1 - \rho_{01}] = \mathcal{H}_{0d}(0)[1 - 7/11] = (4/11)\mathcal{H}_{0d}(0)$ a je: $\mathcal{H}_{0d}(0) = (11/4)\mathcal{H}_0(0)$. Intenzita (**amplitúda**) dopadajúcej vlny $H_{0d}(0) = (11/4)H_0(0) = (11/4)\times 0.001$ A/m = 2.75 mA/m. **Amplitúda** dopadajúcej vlny $E_d \equiv E_{0d}(0) = Z_0 H_{0d}(0) = 376.63\times 2.75\ \Omega$mA/m = 1.035 V/m.