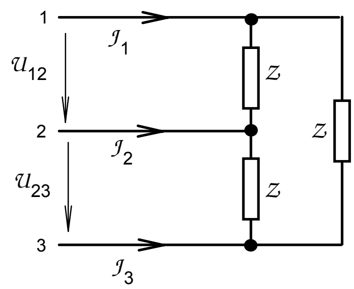
RIEŠENIE

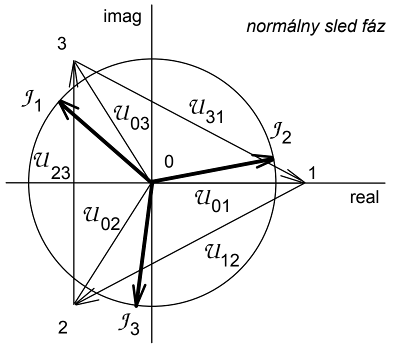
Skúška z predmetu:	**ELEKTRICKÉ OBVODY II**	**Automatizácia kr.10-18**
Dátum skúšky:	**11. február 1997**	**príklady -** *50 b.*

Príklad 1 - *(12 bodov)*
Súmerný, trojfázový zdroj 3 x 230V/400V, 50Hz, podľa obrázku, je zaťažený súmerným spotrebičom $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$, pričom $\mathcal{Z}$ =100 +j100. Zvoľte polohu fázora $\mathcal{U}_{01}$ tak, aby ležal na reálnej osi, a potom:
a) pre tzv. normálny sled fáz vypočítajte fázory prúdov $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ *(6 bodov)* a zakreslite ich do spoločného fázorového diagramu s fázormi napätia zdroja $\mathcal{U}_{01}$, $\mathcal{U}_{02}$, $\mathcal{U}_{03}$, $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{13}$ *(2 body)*
b) vypočítajte činný (wattový) P_W, reaktívny (jalový) P_Q a zdanlivý P výkon trojfázového spotrebiča ($\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$) *(4 body)*
(Návod: pri výpočtoch s výhodou využite fázorový diagram napätí trojfázového zdroja)



TU UVEÏTE VÝSLEDKY!

(2 body)	*(2 body)*	*(2 body)* + *diagram (2 body)*
$\mathcal{I}_1$ = ***4.88∠135°*** (A)	$\mathcal{I}_2$ = ***4.88∠15°*** (A)	$\mathcal{I}_3$ =***4.88∠-105°*** (A)
P_W = ***2380.5*** (W)	P_Q = ***2380.5*** (VAr)	P = ***3366.54*** (VA)
(2 body)	*(1 bod)*	*(1 bod)*



$$\mathcal{I}_{12}=\frac{\mathcal{U}_{12}}{\mathcal{Z}}=\frac{\sqrt{3}\cdot 230\angle-150°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}\angle-195°=2.8169\angle-195°$$

$$\mathcal{I}_{23}=\frac{\mathcal{U}_{23}}{\mathcal{Z}}=\frac{\sqrt{3}\cdot 230\angle 90°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}\angle 45°=2.8169\angle 45°$$

$$\mathcal{I}_{13}=\frac{\mathcal{U}_{13}}{\mathcal{Z}}=\frac{\sqrt{3}\cdot 230\angle 150°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}\angle 105°=2.8169\angle 105°$$

$$\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_{12}+\mathcal{I}_{13}=\left(\frac{\mathcal{U}_{12}}{\mathcal{Z}}+\frac{\mathcal{U}_{13}}{\mathcal{Z}}\right)=\sqrt{3}\,\frac{230(\angle-150°+\angle 150°)}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}(-\sqrt{3})\angle-45°=\frac{6.9}{\sqrt{2}}=4.8790\angle 135°$$

$$\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_{21}+\mathcal{I}_{23}=\left(\frac{\mathcal{U}_{21}}{\mathcal{Z}}+\frac{\mathcal{U}_{23}}{\mathcal{Z}}\right)=\sqrt{3}\,\frac{230(\angle 30°+\angle 90°)}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(1+j\sqrt{3})\angle-45°=4.8790\angle 15°$$

$$\mathcal{I}_3=\mathcal{I}_{32}+\mathcal{I}_{31}=\left(\frac{\mathcal{U}_{32}}{\mathcal{Z}}+\frac{\mathcal{U}_{31}}{\mathcal{Z}}\right)=\sqrt{3}\,\frac{230(\angle-90°+\angle-30°)}{100\sqrt{2}\angle 45°}=2.3\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-j\sqrt{3})\angle-45°=4.8790\angle-105°$$

Prípadne, po transfigurácii trojuholník - hviezda, by boli tri rovnaké (ekvivalentné) impedancie $\mathcal{Z}/3$ pripojené na fázové napätia $\mathcal{U}_{01}$, $\mathcal{U}_{02}$, $\mathcal{U}_{03}$ takže priamo by sme dostali:

$$\mathcal{I}_1=\frac{\mathcal{U}_{10}}{\mathcal{Z}/3}=\frac{3\cdot 230\angle 180°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=4.8790\angle 135°$$

$$\mathcal{I}_2=\frac{\mathcal{U}_{20}}{\mathcal{Z}/3}=\frac{3\cdot 230\angle 60°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=4.8790\angle 15°$$

$$\mathcal{I}_3=\frac{\mathcal{U}_{30}}{\mathcal{Z}/3}=\frac{3\cdot 230\angle-60°}{100\sqrt{2}\angle 45°}=4.8790\angle-105°$$

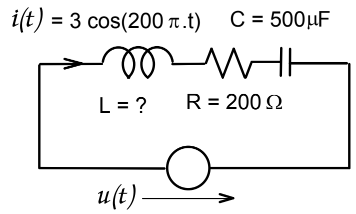
Výkon je trojnásobkom výkonu na jednej z impedancií:

$$\mathcal{P}_1=\mathcal{U}_{10}\mathcal{I}_1{*}=\mathcal{U}_{10}\left(\frac{\mathcal{U}_{10}}{\mathcal{Z}/3}\right){*}=\frac{3U^2}{\mathcal{Z}{*}}=\frac{3\cdot 230^2}{100\sqrt{2}\angle-45°}=\frac{1587}{\sqrt{2}}\angle 45°=793.5(1+j)=1122.18\angle 45°$$

$$\mathcal{P}_1=\mathcal{U}_{10}\mathcal{I}_1{*}=-230\cdot 4.879\angle-135°=1122.17\angle 45°=793.5(1+j)$$ potom: $$\mathcal{P}=3\mathcal{P}_1=2380.5\cdot(1+j)=3366.54\angle 45°$$

Ako veľkosť fázora tu bola zavedená efektívna hodnota: $|\mathcal{U}_f|$ = U_f = 230 V.

Príklad 2 - *(6 bodov)*
Obvod na obrázku je v rezonancii pri časovom priebehu prúdu $i(t)$ = 3 cos(200π·t), určte:
a) frekvenciu f priebehov prúdu a napätia v hertzoch, *(1 bod)*
b) hodnotu indukčnosti L v milihenry, *(2 body)*
c) časový priebehu napätia zdroja $u(t)$! *(3 body)*
(Návod: úlohu riešte pomocou kompexnej symboliky, fázorov - vo frekvenčnej oblasti)



TU UVEÏTE VÝSLEDKY! èasový priebeh napätia zdroja:

f = **100** (Hz)	L = **5.066** (mH)	$u(t)$ = **600.cos(200π.t)**
(1 bod)	*(2 body)*	*(3 body)*

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100$ Hz, keďže $\omega = 200\ \pi$, ako to vyplýva priamo z priebehu prúdu

$i\,(t) = 3\cos(200\pi\cdot t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} = 3\angle 0\,°$

$\mathcal{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$ keďže obvod je v rezonancii.

Potom: $L = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{500\cdot 10^{-6}\cdot(200\pi)^2} = \frac{2000\text{ H}}{40000\pi^2} = \frac{1000\text{ mH}}{20\pi^2} = \frac{50\text{ mH}}{\pi^2} = 5.066$ mH

Keďže: $\mathcal{Z}_{rez} = R \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}_{rez} = 200\ \Omega$, a máme:

$\mathcal{U} = \mathcal{I}\cdot\mathcal{Z}_{rez} = 3\angle 0°\cdot 200 = 600\ \angle 0° \quad \Rightarrow \quad u(t) = 600\cdot\cos(200\pi\cdot t)$

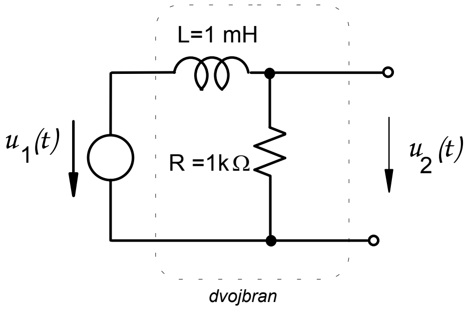
Príklad 3 - *(8 bodov)*

Pre dvojbran na obrázku R =1kΩ, L=1mH

a) odvoďte napäťový prenos $\mathcal{H}(\omega)$, *(3 body)*

b) udajte vzťahy a nakreslite priebeh amplitúdovej $H(\omega)$ a fázovej $\varphi(\omega)$ frekvenčnej charakeristiky ako funkcií frekvencie v **lineárnej mierke** (nie v logaritmickej!) *(3 body)*

c) zistite frekvenciu f_{-3dB}, pri ktorej nadobudne amplitúda výstupného napätia $u_2(t)$ o 3 dB menšiu hodnotu akú by mala pri $\omega \to 0$! *(2 body)*



TU UVEĎTE VÝSLEDKY!

Amplitúdová charakteristika $H(\omega) = 1/\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R})^2} = 1/\sqrt{1+(\omega\cdot 10^{-6})^2}$	frekvencia podľa bodu c) f_{-3dB} = ***159,15*** (kHz)
Fázová charakteristika $\varphi(\omega) = -arctg(\frac{\omega L}{R}) = -arctg(\omega 10^{-6})$	*(2 body)*

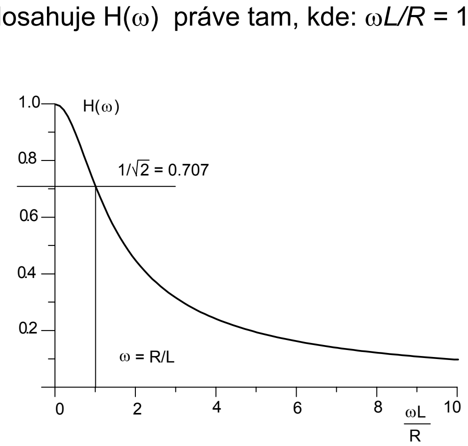
(3 body + 3 body)

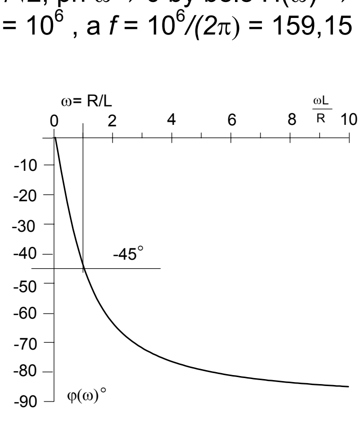
Časová konštanta: $\frac{L}{R} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{3}}\cdot = 10^{-6}$ a prenos : $\mathcal{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{R\frac{\mathcal{U}_1}{R+j\omega L}}{\mathcal{U}_1} = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega\frac{L}{R}} = \frac{1}{1+j\omega 10^{-6}} = \frac{10^6}{10^6+j\omega} = H(\omega)\angle\varphi(\omega)\ ,$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot 10^{-6})^2}} = \frac{10^3}{\sqrt{10^6+\omega^2}}, \qquad \varphi(\omega) = \left(0°-arctg(\frac{\omega L}{R})\right)\ ,$$

pokles o 3dB je ekvivalentný poklesu z hodnoty 1 na hodnotu $1/\sqrt{2}$, pri $\omega \to 0$ by bolo $H(\omega) \to 1$ a preto hodnotu $1/\sqrt{2}$ dosahuje $H(\omega)$ práve tam, kde: $\omega L/R = 1$, t.j. tam, kde $\omega = 10^6$, a $f = 10^6/(2\pi) = 159{,}15$ kHz.





Príklad 4 - *(6 bodov)*

Pre dvojbran z **Príkladu 3** vypočítajte *(4 body)* a nakreslite *(2 body)* časový priebeh napätia $u_2(t)$ na výstupe, ak na vstupe pôsobil napäťový impulz $u_1(t) = U.\mathbf{1}(t) - U.\mathbf{1}(t-T_0)$!

(Návod: úlohu riešte pomocou operátorového počtu pomôcky sú uvedené na konci tohoto listu - Laplace-Carsonova transformácia)

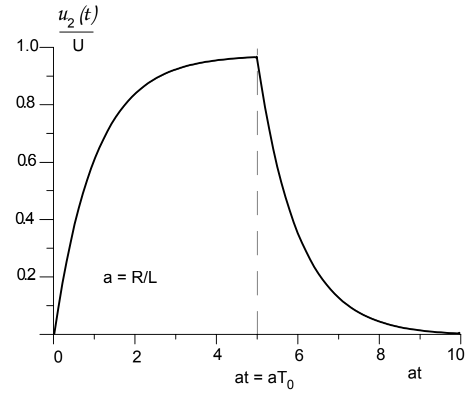
TU UVEĎTE VÝSLEDOK! $a = R/L = 10^6$

Priebeh napätia
$u_2(t) = U(1-e^{-at}).1(t) - U(1-e^{-a(t-T_0)}).1(t-T_0)$

(4 body) + nákres (2body)

Vstupnému napätiu je priradený obraz: $u_1(t) = U.\mathbf{1}(t) - U.\mathbf{1}(t - T_0) \Rightarrow u_1(p) = U(1 - e^{-pT_0})$

z prenosu $\mathcal{H}(\omega)$ dostaneme zámenou $p \to j\omega$ prenos v operátorovom tvare (označíme pritom: $a = R/L$)



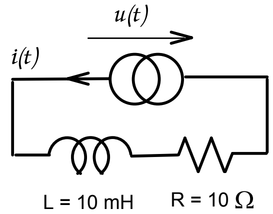
$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{a}} = \frac{a}{a + j\omega} \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{u_2(p)}{u_1(p)} = \frac{a}{p+a}$$

z neho Laplace-Carsonovský obraz výstupného napätia a spätnou transformáciou jeho originál

$$u_2(p) = H(p)\cdot u_1(p) = \frac{U(1-e^{-pT_0})a}{p+a} = U\frac{a}{p+a} - U\frac{a}{p+a}e^{-pT_0} \quad \Rightarrow \quad U(1-e^{-at})\cdot\mathbf{1}(t) \;-\; U(1-e^{-a(t-T_0)})\cdot\mathbf{1}(t-T_0)$$

keï sme opakovane využili vlastnosť: $f(t).\mathbf{1}(t) \Leftrightarrow f(p)$ resp. $f(t-T).\mathbf{1}(t-T) \Leftrightarrow f(p)e^{-pT}$

Príklad 5 - *(8 bodov)*

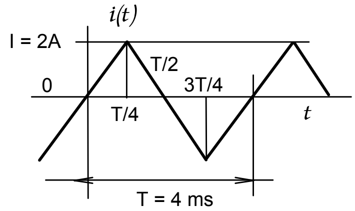


V obvode napájanom periodickým "súmerným trojuholníkovým" prúdom podľa obrázku:

a) vypočítajte podiel maximálnej hodnoty I prúdu zdroja $i(t)$ a jeho efektívnej hodnoty I_{ef}, *(3 body)*

b) nakreslite časový priebeh $u(t)$ *(3 body)* a stanovte strednú hodnotu U_s napätia na zdroji *(2 body)*

(Návod: riešte len v časovej oblasti, počítajte priamo z definície efektívnej a strednej hodnoty!)



TU UVEĎTE VÝSLEDKY!

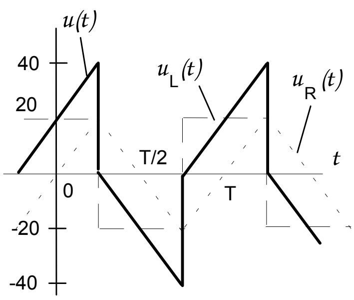
I/I_{ef} = $\sqrt{3}$	U_s = **0** (V)
(3 body)	*(2 body)* + *v mierke nakreslený priebeh (3 body)*

Jednosmerná zložka napätia U_o je vyvolaná len jednosmernou zložkou prúdu I_o, tá je však, vzhľadom na súmernosť priebehu $i(t)$, nulová a preto je nulová aj stredná hodnota napätia na zdroji $U_s \equiv U_o$

$$U_s = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \qquad \text{Podľa definície je:} \quad I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{4I}{T}t\right)^2 dt = \left(\frac{4}{T}\right)^3 I^2 \int_0^{T/4} t^2 dt = \left(\frac{4}{T}\right)^3 I^2 \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{I^2}{3}$$

takže podiel: $\dfrac{I}{I_{ef}} = \dfrac{I}{\dfrac{I}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

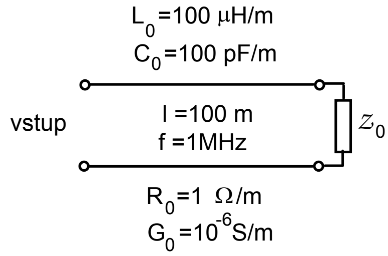
Napätie na indukčnosti bude mať obdĺžnikový priebeh:



$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \to \quad \pm L\frac{4I}{T} = \pm 10^{-2}\frac{4\cdot 2}{4\cdot 10^{-3}} = \pm 20\ V$$

napätie na rezistore bude mať taký istý priebeh ako prúd zdroja s amplitúdou $I.R$ = 2.10 = 20 V. Priebeh napätia na zdroji je daný ich súètom, je súmerný a mení sa v rozsahu ± 40 V, jeho jednosmerná zložka je nulová.

Príklad 6 - *(10 bodov)*
Vypočítajte:
a) koľkokrát menšia (väčšia) je dĺžka vlny λ_v na vedení ako dĺžka vlny ktorá by pri danej frekvencii odpovedala vlneniu vo voľnom priestore vo vákuu (λ_0 = c/f, kde c = 3.10^8 m/s) *(2 body)*
b) aká je charakteristická impedancia Z_0 vedenia *(2 body),* viete uviesť aký je to typ vedenia*? (2body)*
c) aká je vstupná impedancia Z_v vedenia dlhého 100 m *(2body)*, uveďte ako by sa Z_v zmenila pri zdvojnásobení dĺžky vedenia *(2body)*



(Návod: využite pomôcky uvedené na konci tohoto listu)

TU UVEÏTE VÝSLEDKY!

		typ vedenia:	*pri dĺžke 100 m*	*pri dĺžke 200 m*
λ_0/λ_v = **30**	Z_0 = **1000** (Ω)	**neskresľujúce**	Z_v = **1000** (Ω)	Z_v = **1000** (Ω)
(2 body)	*(2 body)*	*(2 body)*	*(2 body)*	

Vlnová dĺžka λ_0 = c/f = $3.10^8/10^6$ = 300 m

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{(1 + j2\pi \cdot 10^6 10^{-4})(10^{-6} + j2\pi \cdot 10^6 10^{-10})} = 10^{-3}\sqrt{(1 + j200\pi)(1 + j200\pi)} =$$
$$10^{-3}(1 + j200\pi) = 10^{-3} + j0.2\pi \quad \Rightarrow \quad \beta = 10^{-3} \quad \text{a} \quad \alpha = 0.2\pi$$

takže vlnová dĺžka $\lambda_v = 2\pi/\alpha = 2\pi/(0.2\pi)$ = 10 m.

Tlmenie β ani fázová konštanta α nezávisia od frekvencie - vedenie je neskresľujúce!
Charakteristická impedancia je

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{1 + j2\pi \cdot 10^6 10^{-4}}{10^{-6} + j2\pi \cdot 10^6 10^{-10}}} = \sqrt{\frac{1 + j200\pi}{10^{-6}(1 + j200\pi)}} = 10^3\sqrt{\frac{1 + j200\pi}{1 + j200\pi}} = 1000\ \Omega$$

a pri vedení zakončenom charakteristickou impedanciou $Z_{0,}$ je bez ohľadu na jeho dĺžku, vždy $Z_v = Z_v$!